Билим берүү жана Илим министрлиги
ОшМУнун окуу китептери

**М.Ш.Мамаюсупов, А.Дж. Аттокурова,
З.М.Садыков**

www.okuma.kg **САЙТЫ**

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

боюнча тесттерди чыгаруу

ОШ-2013

УДК 510

ББК 22.112

М 22

Китеп “Агартуу Академиясы” коомдук фондунун Окумуштуулар кеёеши тарабынан мектеп окуучуларына, математика мугалимдерине жана ЖОЖ дун математика адистигинде окуган студенттерге окуу китеби катары сунушталат.

Редактору: “Ноокат билимканасы” лицейинин математик мугалимдери Ж. Акбаева, И. Айтматова.

Мамаюсупов М. Ш., Аттокурова А.Дж, Садыков З.М.

М22 Алгебра жана анализдин башталышы боюнча тесттерди чыгаруу: Окуу китеби. – Ош: 2013. – 282 б.

ISBN 978 – 9967 – 03 – 877 – 6

«Алгебра жана анализдин башталышы боюнча тесттерди чыгаруу» окуу китеби жалпы республикалык тесттерге даярдануу программасынын чегинде жазылып, жалпы эле мектеп математикасын өздөштүрүүнү каалоочуларга арналган.

Сын – пикирлерди төмөндөгү дарекке жөнөтүңүздөр:

723500, Ош ш., Ленин к., 331,

ОшМУ нун жогорку математика жана МИОМ кафедралары.
www.okuma.kg , mamaiusupov.m@gmail.com

М 1602020000 – 13 УДК 510

ISBN 978 – 9967 – 03 – 877 – 6 ББК 22.12
@ Мамаюсупов М.Ш., Аттокурова А.Дж, Садыков З.М.

2013

1 – БӨЛҮК

МАЗМУНУ

КИРИШ СӨЗ

Бул китеп математика предмети боюнча жалпы республикалык тестирлөөгө жана Россиялык ЖОЖдорго окууга өтүүгө өз алдынча даярданган окуучулар үчүн ылайыкташтырылып түзүлүп, логикалык ой жүгүртүүнү кеңейтүүчү мисалдарды чыгаруу ыкмалары көрсөтүлгөн. Китепте математикалык маселелерди формалдуу чыгарып, жообун табуу аракеттери негизги орунга коюлбай, окуучуга маселенин түзүлүү табиятын түшүнүп, андан кийин эмнени, эмне үчүн? – чыгаруу керектигин үйрөтүүгө басым жасалган.

Китеп эки бөлүктөн турат, биринчи бөлүгүндө алгебра жана анализдин башталышы боюнча мектеп программасын эске түшүрүп, бышыктоочу ар кандай кыйындыктагы 210 мисалдын чыгарылыштары түшүндүрмөлөрү менен берилип, зарыл учурда графиктерде көрсөтүлгөн. Тандалган мисалдар менен машыгуу мектеп окуучуларынын ЖОЖдорго кирүү сынактарын ийгиликтүү тапшыруусун камсыз кылары, ондогон жылдар ичинде “Ноокат билимканасы” – лицейинин окуучулары менен иштешүүдө далилденген.

Китепте сунуш кылынган материалдардын математика предметин өздөштүрүүгө өбөлгө болору Ош МУнун “Математика”адистигинде окуган студенттердин МИПбоюнча сабактарында тажрыйбаланып, “Математиканы жана информатиканы окутуунун методикасы” кафедрасы тарабынан математика мугалиминин компетенттүүлүгүн арттыруу ыкмаларынын бири катарында таанылган.

Китепти окуп, практикасында колдонуп сунуштарын билдиргендиги үчүн авторлор “Ноокат билимканасы” – лицейинин математика мугалимдери К. Акбаевага, И.Айтматовага ыраазылык билдирет.

Китеп боюнча сунуш пикирлерди www.okuma.kg , mamaiusupov.m@gmail.com

даректерине билдирүүгө болот.

1 – БӨЛҮК

§ 1.1 Рационалдык теңдемелер жана барабарсыздыктар

1. Квадраттык теңдемелерди чечүүгө келтирилүүчү мисалдар

Теңдемени чыгаргыла.

1 – МИСАЛ : $x - 2 + \frac{1}{x} = 0$.

Жооптор : (а) ± 1; (б) -1 ; (в)1 ; (г)2 ; (д) $\pm\sqrt{2}$

ЧЫГАРУУ: ► Теңдемени чыгаруудан мурда, анын (ЧЖА) – чыгарылыштарынын жашоо аймагын (орусча ОДЗ – “область допустимых значений”) аныктайбыз. Теңдемеде $\frac{1}{x}$ бөлчөгү катышкандыктан, анын жашашы үчүн бөлүмү $x \neq 0$ болушу керек, анткени нөл санына бөлө албайбыз. Демек, ЧЖА: $\mathrm{X} =]-\infty,\ 0[\cup]0, +\infty[$ - нөл санынан башка бардык чыныгы сандар болот.

Берилген теңдеменин эки жагын тең нөлдөн айырмалуу деп алынган x санына көбөйтсөк, теңдемени түзүүчү теңдештик бузулбайт. Анда

$$x \cdot x - 2 \cdot x + \frac{1}{x} \cdot x = 0 \cdot x \ \Leftrightarrow\ x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow\ x - 1 = 0\ \Rightarrow$$

$x = 1$ саны эки эселүү чечим болот, анткени квадраты нөл болгон сандын өзү нөлгө тең болот. Табылган $x = 1$ саны теңдемеге чечим болуп ЧЖА га кирет, б.а. нөлдөн айырмалуу. Чыныгы жообу (в).

Мында $(m-n)^2 = (m-n)\cdot(m-n) = m^2 - 2mn + n^2$ (1)

формуласы пайдаланылды $(m = x,\ n = 1)$.◄

✓ $ax^2 + bx + c = 0$ көрүнүшүндөгү теңдеме квадраттык теңдеме деп аталат. Мында $a \neq 0,\ b,\ c$ белгилүү турактуу сандар, x белгисиз чоңдук. Эгерде $a = 0$ болсо, анда квадраттык теңдеме $bx + c = 0$ көрүнүшүндөгү сызыктуу теңдемеге айланып, чечими оңой эле $x = -\frac{c}{b}$ табылмак.

Квадраттык теңдеменин чечимдерин табуу үчүн, теңдеменин сол жагындагы квадраттык үч мүчөнүн толук квадратын бөлүп жазабыз. Ал үчүн (1) – эрежени же болбосо

$$(m+n)^2 = (m+n)\cdot(m+n) = m^2 + 2mn + n^2 \qquad (2)$$

эрежесин колдонобуз. Берилген теңдеменин оң жагын (2) – эрежени колдонууга боло тургандай абалга теңдеш өзгөртүп түзөлү:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\underbrace{\underbrace{x^2}_{m^2} + 2\cdot\underbrace{x}_{m}\cdot\underbrace{\frac{b}{2a}}_{n} + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{n^2}}_{(m+n)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{(m+n)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$= \left|\begin{matrix}\text{кашааны}\\ \text{ачып}\end{matrix}\right| = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4\,a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4\,a}$ээ болобуз. Мында биринчи кадамда a санын кашаанын сыртына чыгардык (кашааны ачып a га көбөйтсөк сол жагы келип чыгат), экинчи кадамда бир эле $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ санын кошуп кайра кемитип койдук (алар жоюшуп кеткендиктен эч нерсе өзгөрбөй, теңдеш өзгөрүү болот), үчүнчү кадамда (2) – эрежени колдонуу ыңгайын көрсөттүк, төртүнчү кадамда (2) – эрежени колдонуп, квадраттык үч мүчөнүн толук квадратын ажыратып жаздык. Натыйжада

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4\,a} \qquad (3)$$

теңдештигине ээ болдук.

Ошентип $ax^2 + bx + c = 0$ теңдемесин чечүү маселесин ага теңдеш болгон

$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4\,a} = 0$ теңдемесин чечүү маселесине алып келебиз. Аны чечүү үчүн белгилүү чоңдуктарды барабардыктын оң тарабына өткөрүп,

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4\,a}$ теңдештигинин эки жагын тең a санына бөлүп жиберсек ($a \neq 0$), анда $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4\,a^2}$ келип чыгат. Мындан

$$x+\frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4\,a^2}} \iff$$

$$\iff \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4\,a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

көрүнүшүндөгү чечимге ээ болобуз. “$\pm$” белгисин алганыбыздын себеби, терс жана оң сандардын экөөсүнүн тең квадраттары оң боло бергендигинде:

$$\left(-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4\,a^2}}\right)^2 = x+\frac{b}{2a} \text{ жана } \left(+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4\,a^2}}\right)^2 = x+\frac{b}{2a}.$$

Чечим “$\pm$” белгилеринин тандалышына жараша ар түрдүү эки мааниде табылгандыктан, жалпы учурда квадраттык теңдеменин чечимдери

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4)$$ көрүнүшүндө табылат.

Квадраттык теңдемелерди чечүүдө жогоруда баяндалган ыкмаларды колдонуп олтурбастан, даяр табылган (4) – формуланы колдоно беребиз. Сандын квадраты ар дайыма оң болгондуктан, квадраттык тамырдын алдында турган туюнтма $b^2 - 4ac \geq 0$ оң болсо гана (4) – эрежеден чечимдерди табууга болот. Ошондуктан квадраттык тамыр алдындагы туюнтманы теңдеменин дискриминанты деп атап,

$$D = b^2 - 4ac \qquad (5)$$

көрүнүшүндө белгилейбиз. Демек $D \geq 0$ болсо квадраттык теңдеменин чечимдери жашайт, ал эми $D < 0$ болсо жашабайт.

Эмне үчүн оң сандын гана квадраттык тамыры жашайт жана тамырдын алдына" $\pm$ " *белгиси коюлат деген суроо туулат. Бул суроого мисал көрсөтүү менен жооп берели:* $y^2 = 9$ *дегенди квадраты 9 га барабар сан деп түшүнөбүз. Мындай сандар экөө* $(-3)^2 = 9$ жана $(+3)^2 = 9$. *Ошондуктан* $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ *деп, анын эки маанисин көрсөтүп жазууга туура келет. Экинчиден каалагандай сандын квадраты оң сан, ошондуктан ага барабар болгон сан да оң болушу зарыл. Демек,*y^2 *санына тең болушу үчүн 9 да оң болушу керек, ал тамыр алдындагы сан болот.*

✓ Квадраттык теңдемени чыгарууда ыңгайына карап, (4) – формуладан натыйжа катары келип чыккан төмөндөгүдөй ыкмаларды да колдонууга болот:

1. Виеттин формуласы. Квадраттык теңдеменин $x_1,\ x_2$чечимдеринин суммасы (–) терс белгиси менен алынган ортоңку b мүчөсүнө, ал эми көбөйтүндүсү c –бош мүчөсүнө барабар $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b\ , \\ x_1 \cdot x_2 = \mathrm{c} \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаруу.

2. Квадраттык теңдемени алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$ көрүнүшүндөгү көбөйтүүчүлөргө ажыратып, көбөйтүндү $a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ нөлгө тең болушу үчүн, көбөйтүүчүлөрдүн бирөөсүнүн нөлгө тең болушу жетиштүү экендигин пайдалануу.

2 – МИСАЛ . Теңдемени чыгар : $\frac{2x}{x-3} + \frac{1}{2x+3} + \frac{3x+9}{2x^2-3x-9} = 0$.

Болжолдуу жооптор : (а) 3 , $-\frac{3}{2}$; (б) 2 ; (в) $-\frac{3}{2}$, -1 ; (г) $\frac{3}{2}$, 1 ;

(д) 1, (е) -1.

ЧЫГАРУУ: ► Теңдемеде катышкан бөлчөктөрдүн жашашы үчүн, бөлчөктөрдүн бөлүмдөрү $\begin{cases} x - 3 \neq 0, \\ 2x + 3 \neq 0, \\ 2x^2 - 3x - 9 \neq 0 \end{cases}$ нөлдөн айырмалуу болушу керек.

$2x^2 - 3x - 9 = 0$ теңдемесин (4) – формула менен чыгарып көрүп, анын $x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{3}{2}$

чекиттеринде нөлгө айланарын көрөбүз. Демек, биринчиден

$2x^2 - 3x - 9 = (x - 3) \cdot (2x + 3)$ көбөйтүүчүлөрүнө ажырап, теңдемедеги бөлчөктөргө жалпы бөлүм болот, экинчиден

$2x^2 - 3x - 9 \neq 0 \ \Leftrightarrow \ x - 3 \neq 0$ жана $2x + 3 \neq 0$ шарттары тең күчтүү болушат, анткени көбөйтүндү нөл болбошу үчүн көбөйтүүчүлөрдүн бардыгы нөл болбошу керек.

Ошентип теңдемедеги бөлчөктөрдүн бөлүмдөрү

$x-3 \neq 0$ же $x_1 \neq 3$, $2x+3 \neq 0$ же $x_2 \neq -\frac{3}{2}$ болгондо гана жашап, теңдеменин ЧЖА сы

$X = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$- сан огунун $-\frac{3}{2}$ жана 3

чекиттеринен башка бардык чекиттеринин көптүгү болот.

Теңдемени чыгарып баштайлы. Ал үчүн анын сол жагын жалпы бөлүмгө келтирели

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{1}{2x+3} + \frac{3x+9}{2x^2-3x-9} = \frac{2x\cdot(2x+3)}{2x^2-3x-9} + \frac{1\cdot(x-3)}{2x^2-3x-9} + \frac{(3x+9)\cdot 1}{2x^2-3x-9} = \frac{4x^2+10x+6}{2x^2-3x-9}.$$

Анда берилген $\frac{2x}{x-3} + \frac{1}{2x+3} + \frac{3x+9}{2x^2-3x-9} = 0$ теңдеме

$\frac{4x^2+10x+6}{2x^2-3x-9} = 0$ көрүнүшүнө келет.

Бөлчөк нөлгө тең болушу үчүн бөлчөктүн алымы нөлгө барабар болушу керек, анда берилген теңдеме $4x^2 + 10x + 6 = 0$ көрүнүшүнө, же 2 ге бөлгөндөн $(2 \neq 0)$ кийин $2x^2 + 5x + 3 = 0$ көрүнүшүнө келет. Аны (4) – формула менен чыгарсак

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4},$$

$x_1 = \frac{-5+1}{4} = -1$ жана $x_2 = \frac{-5-1}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$ чечимдерин табабыз. Табылган чечимдердин ичиненчиймеденкөрүнгөндөй,

$\underbrace{-\infty \_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{ЧЖА}} \frac{-3}{2} \underbrace{\_\_ -1 \_\_\_\_ 0 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{ЧЖА}} 3 \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ +\infty}_{\text{ЧЖА}}$ бир гана $x_1 = -1$ саны ЧЖА га кирип чечим боло алат.

Туура жообу: (е) .◄

3 – МИСАЛ . $x^4 - x^2 - 12 = 0$ теңдемесин чыгаралы.

Жооптор : (а) 2, - 3 ; (в) ± 2, -3 ; (г) 2 , $\sqrt{3}$; (д) ± 2;

(е) ± 2, $\pm\sqrt{3}$.

► ЧЫГАРУУ: Сандарды каалагандай даражага көтөрүп, көбөйтүп, кемитүүгө болгондуктан, теңдеменин ЧЖА сы $X = (-\infty, +\infty)$ бүтүндөй сан огу болот.

$x^2 = t \quad (*) -$ белгилөөсүн киргизсек, квадратка тең болгон сан катары $t \geq 0$ оң болсун деген кошумча шарт коюлат. Белгилөөдөн кийин берилген теңдеме $t^2 - t - 12 = 0$ квадраттык теңдемесине өзгөрүп түзүлөт. (4) – формуланы пайдаланып, анын

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$t_1 = \frac{1+7}{2} = 4, t_2 = \frac{1-7}{2} = -3$ көрүнүшүндөгү чечимдерин табабыз. Кошумча шартты эске алып, анын оң белгидегисин гана алабыз.

Демек, $(*)$ дан $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ же $\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -2 \end{cases}$ чечимдери табылып, экөөсү тең ЧЖА га киргендиктен туура жооп (д) болот. ◄

4 – МИСАЛ . $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$ теңдемесин чыгар.

Жооптор : (а) -3 , 5; (б) $0, -3, 5$; (в) $-5, 0, 3$; (г) 0 ; (д) $-5, 3$.

► ЧЫГАРУУ: Сандарды каалагандай даражага көтөрүп, көбөйтүп, кемитүүгө болгондуктан, теңдеменин ЧЖА сы $X =]-\infty, +\infty[$ бүтүндөй сан огу болот.

x өзгөрүлмөсүн кашаадан чыгарып, берилген теңдемени

$x \cdot (x^2 - 2x - 15) = 0$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп түзөлү. Көбөйтүндү нөлгө барабар болушу үчүн, алардын бирөөсүнүн нөлгө тең болушу жетиштүү, ошондуктан теңдемени $\begin{cases} x = 0 \text{ же } x_1 = 0, \\ x^2 - 2x - 15 = 0 \end{cases}$ шарттарын канааттандырган эки теңдеме катарында карайбыз.

(4) – формуланын $b = 2$ жуп сан болгон учурун колдонуп, экинчи $x^2 - 2x - 15 = 0$ квадраттык теңдемени чыгарсак

$$x_{2,3} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = \frac{-(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 1 \cdot (-15)} = 1 \pm \sqrt{1+15}$$
$$= 1 \pm 4$$

$x_2 = 1 + 4 = 5, x_3 = 1 - 4 = -3$ чечимдерине ээ болобуз. Ошентип теңдеме үч чыгарылышка ээ болот $x_1 = 0$, $x_2 = 5, x_3 = -3$. Туура жообу (б).◄

5 – МИСАЛ . $(x^2 - x)^2 + 12 = 8(x^2 - x)$ теңдемесин чыгар.

Жооптор : (а) $\pm 2, -1, 3$; (б) $-1, 2$; (в)$3, -2$; (г) $\pm 2, 1, -3$;

(д) $-1, 2, -3$.

► ЧЫГАРУУ: Сандарды каалагандай даражага көтөрүп, көбөйтүп, кемитүүгө болгондуктан, теңдеменин ЧЖА сы $X = (-\infty, +\infty)$ бүтүндөй сан огу болот.

$x^2 - x = t$ белгилөөсүн киргизели. Киргизилген белгилөөдө t га шарт койбойбуз, анткени $|x| < 1$ болгондо $x^2 - x < 0 -$ терс, ал эми $|x| \geq 1$ болгондо $x^2 - x \geq 0 -$ оң белгиге ээ болуп, t нын белгисине чек коюлбайт.

Киргизилген белгилөөдөн кийин, теңдеме $t^2 + 12 = 8t$ же

$t^2 - 8t + 12 = 0$ квадраттык теңдемесине теңдеш өзгөртүлөт. Аны (4) – формуланын $b = 8$ жуп сан болгон учурун колдонуп чыгарсак

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = 4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \cdot 12} = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$$

$x_{1,2} = 4 + 2 = 6$, $x_2 = 4 - 2 = 2$ чечимдерин тапкан болобуз. Табылган чечимдерди белгилөөгө койсок, берилген теңдеменин чыгарылышы $\begin{cases} x^2 - x = 6, \\ x^2 - x = 2 \end{cases}$ эки квадраттык теңдемелердин чыгарылыштарын табуу маселесине келтирилет.

1) $x^2 - x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$ теңдемеси

$$x_{1,2}=\frac{-b\ \pm\ \sqrt{b^2\ -\ 4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\ \sqrt{(-1)^2\ \ -\ \ 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2}$$
$$=\frac{1\pm\ \sqrt{1\ +\ 24}}{2}=$$

$=\frac{1\pm 5}{2}$, $\quad x_1\ =\frac{1+5}{2}=3$ жана $x_2=\frac{1-5}{2}=-2$ чечимдерине ээ болот.

2) $x^2-x=2\quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2=0$ теңдемеси

$$x_{3,4}=\frac{-b\ \pm\ \sqrt{b^2\ -\ 4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\ \sqrt{(-1)^2\ \ -\ \ 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}$$
$$=\frac{1\pm\ \sqrt{1\ +\ 8}}{2}=$$

$=\frac{1\pm 3}{2}$, $\quad x_3\ =\frac{1+3}{2}=2$ жана $x_4=\frac{1-3}{2}=-1$ чечимдерине ээ болот.

Табылган чечимдердин бардыгы ЧЖА га киргендиктен, берилген теңдеме

$x_1\ =3$, $x_2=-2, x_3\ =2$, $x_4=-1$ чечимдерине ээ болуп, туура жооп (а). ◄

6 – МИСАЛ . $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}\ =\ \frac{2x-1}{x^3+1}$ теңдемесин чыгаргыла.

Жооптор : (а) $-1,\ 2$; (б) 2 ; (в) -1; (г) $1,-2$; (д) -2 .

► ЧЫГАРУУ: Теңдемеде бөлчөктөр катышкандыктан, алардын бөлүмдөрү нөлдөн

айырмалуу болушу керек: $\begin{cases}x^2-\ x\ +\ 1\neq 0,\\ x\ +\ 1\neq 0,\\ x^3\ +\ 1\neq 0\,.\end{cases}$

Оболу $\quad m^3+n^3=(m+n)(m^2-m\cdot n+n^2)\qquad (6)$

формуласын эстеп, $x^3\ +\ 1=(x+1)(x^2-\ x\ +\ 1)$ көбөйтүүчүлөргө ажырарын байкайбыз. Демек,$x^3\ +\ 1$ туюнтмасы, биринчиден берилген теңдемедеги бөлчөктөргө жалпы бөлүм болот. Экинчиден

$x^3\ +\ 1\neq 0\ \ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-\ x\ +\ 1\neq 0,\\ x\ +\ 1\neq 0\end{cases}$ шарттары тең күчтүү болушат.

Анда $x + 1 = 0 \iff x = -1$ чекитинде нөлгө айланса,

$x^2 - x + 1 = 0$ теңдештиги (6) – дискриминанты

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ терс болгондуктан, x тин бир да маанисинде аткарылбайт. Чынында эле, анын толук квадратын ажыратып карасак,

$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ келип чыгып, оң сандардын суммасы катарында x тин бардык маанилеринде $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ оң болот. Демек, теңдемедеги бөлчөктөрдүн бөлүмү бир гана $x = -1$ чекитинде нөлгө айланышы мүмкүн болуп, теңдеменин ЧЖА сы сан огундагы (-1) ден башка бардык $\mathrm{X} = (-\infty,\ -1) \cup (-1,\ \infty)$ чекиттер болот.

Теңдемени чыгаруу үчүн, аны $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x^3 + 1} \iff$

$\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2x - 1}{x^3 + 1} = 0$көрүнүшүндө жазып, жалпы бөлүмгө келтирели

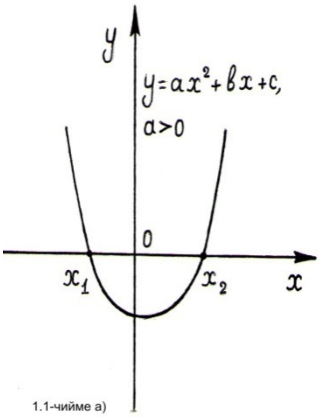
$\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2x - 1}{x^3 + 1} = 0 \iff \frac{2(x + 1)}{x^3 + 1} - \frac{1\left(x^2 - x + 1\right)}{x^3 + 1} - \frac{1(2x - 1)}{x^3 + 1} = 0$ же

$\frac{2(x + 1) - \left(x^2 - x + 1\right) - (2x - 1)}{x^3 + 1} = 0$. Бөлчөк нөлгө тең болушу үчүн, анын алымы нөлгө тең болорун эске алып, берилген теңдемени ага тең күчтүү болгон$2(x + 1) - (x^2 - x + 1) - (2x - 1) = 0$ же $2x + 2 - x^2 + x - 1 - 2x + 1 = 0$ же $- x^2 + x + 2 = 0$ же эки жагын (-1)ге көбөйтүп, $x^2 - x - 2 = 0$ теңдемесине өзгөртүп түзөбүз. Аны (4) – формула менен чыгарып

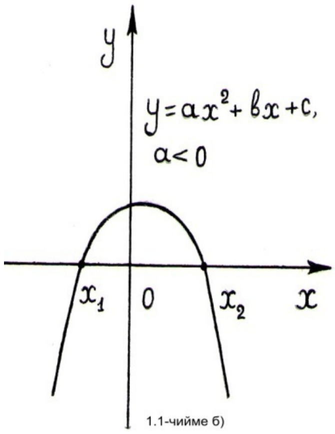
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} =$$

$= \frac{1 \pm 3}{2}$, $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ жана $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$ чечимдерине ээ болобуз.

$x_2 = -1$ чечими ЧЖА га кирбегендиктен, туура жообу $x_1 = 2$ же (б) болот.◀



1.1-чийме а)



1.1-чийме б)

- ✓ Эгерде $ax^2 + bx + c = 0$ теңдемесинин эки x_1 жана x_2чыгарылышы жашаса, анда
- ✓ у $= ax^2 + bx +$ с функциясынын графиги Оx координаттык огун ушулx_1 жана x_2чекиттеринде кесип өтүп, табылган чечимдер

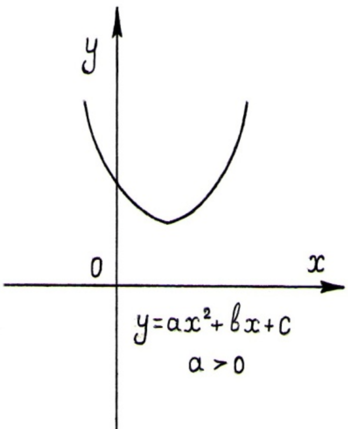
у $= ax^2 + bx +$ с функциясынын нөлдөрү деп аталышат.

Мында эки учурдун болушу мүмкүн: 1) $a > 0$ оң болсо, параболанын бутактары жогору тарапка багытталып, чечим болгон эки чекитте Оx огун кесет (1.1 – чийме).

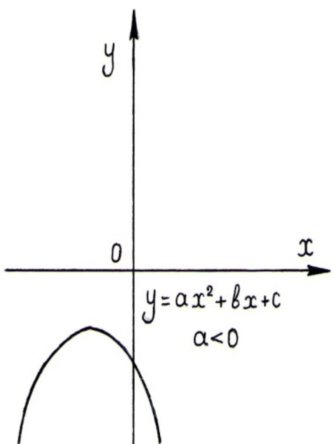
2) $a < 0$ терс сан болсо, параболанын бутактары төмөн багытталып, чечим болгон эки чекитте Оx огун кесет (1.1 – чийме).

- ✓ Эгерде $ax^2 + bx + c = 0$ теңдемесинин дискриминанты $D = b^2 - 4ac < 0$ терс сан болуп чыгарылыштары жашабаса, анда у $= ax^2 + bx +$ с функциясынын графиги Оx координаттык огу менен кесилишпейт.

  Бул учурда: 1) $a > 0$ оң болсо, параболанын бутактары жогору карай багытталып, у $= ax^2 + bx +$ с функциясынын графиги Оx огунун жогорку тарабында жайгашып Оx огу менен кесилишпейт (1.2 - чийме).
  2) $a < 0$ терс сан болсо, параболанын бутактары төмөн багытталып, у $=$



1.2-чийме а)



1.2-чийме б)

$ax^2 + bx + \text{c}$ функциясынын графиги $0x$ огунун төмөнкү тарабында жайгашып $0x$ огу менен кесилишпейт (1.2 - чийме).

2. Барабарсыздыктарды чыгаруу

7 – МИСАЛ . $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4) \leq 0$ барабарсыздыгы аткарыла турган сандардын көптүгүн тапкыла.

Жооптору: (а)$(-2,\ 1) \cup (3,\ 4)$; (б)$(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$;

(в)$[-2, \quad 3] \cup [4, +\infty)$; (г)$(-\infty, -4] \cup [1, 2]$; (д)$[-4, 1] \cup [2, 3]$.

► ЧЫГАРУУ: Сандарды каалаганчалык көбөйтүп, кошуп, кемитүүгө болгондуктан, барабарсыздыктын ЧЖА сы $\mathrm{X} = (-\infty, +\infty)$ бүтүндөй сан огу болот.

Ар бир кашаанын ичин бир сан деп түшүнсөк, анда төрт сандын көбөйтүндүсү терс болушу үчүн үчөөнүн оң белгиде, бирөөсүнүн терс белгиде; болбосо үчөөсүнүн терс белгиде, бирөөсүнүн оң белгиде болушу жетиштүү. Ошондуктан ар бир кашаанын белгилерин көрсөткөн чиймелерди сызып салыштыралы:

1 – кашаанын нөлү $x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$

чекити $\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_}_{(-)}1\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$;

2 – кашаанын нөлү $x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2$ чекити

$\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_}_{(-)}-2\overbrace{\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$;

3– кашаанын нөлү $x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3$

чекити $\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_}_{(-)}3\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$;

4– кашаанын нөлү $x - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4$чекити

$\underbrace{\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{(-)}4\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$.

Анда салыштыруунун негизинде, айтылган шарттар эки

$[-2,\ 1]$ жана $[3,\ 4]$ кесиндилеринде гана аткарыларын көрүп, туура чыгарылыш $X = [-2,\ 1] \cup [3,\ 4]$ же (а)

деп жооп беребиз.◄

8– МИСАЛ .$\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7} \leq 0$барабарсыздыгын чыгаргыла.

Жооптор : (а)$[3{,}5\ ,\ 6] \cup [8,\ +\infty]$; (б)$(-\infty,\ \ 3{,}5) \cup [6,\ 8]$;

(в)$(-\infty,\ \ 3{,}5] \cup [6,\ \ \ \ \ 8]$; (г)$(-\infty,\ \ \ \ \ 3{,}5) \cup [8, +\infty)$;

(д)$(-\infty,\ 3{,}5) \cup (6,\ 8)$.

► ЧЫГАРУУ: Берилген барабарсыздыктын ЧЖА сы бөлчөктүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгон чекиттерден турат. Бөлүмдүн нөлү

$2x - 7 = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ x = 3{,}5$ чекити болот. Демек, ЧЖА:

$X = (-\infty,\ 3{,}5) \cup (3{,}5, +\infty)$ же сан огундагы $x = 3{,}5$ чекитинен башка бардык чекиттер болот.

Берилген барабарсыздык бөлчөктүн белгисин аныктоону талап кылгандыктан, бөлчөк эки учурда терс болорун эстейбиз.

1 – учур:алымы оң, бөлүмү терс $\begin{cases} (x-6)(x-8) \geq 0, \\ 2x - 7 < 0 \ \ (бөлүмү\ нөл\ болбойт) \end{cases}$

Алымынын $(x-6)(x-8) = 0$ нөлдөрү $x = 6$ жана$x = 8$ чекиттери болорун көрүп, чиймеде белгилерин салыштыралы :

Бөлүмү $\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_}_{(-)}3{,}5\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$;

Алымы $\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{(-)}\overbrace{6\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$;

Алымы $\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{(-)}\overbrace{8\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$.

Алымы эки сандын көбөйтүндүсү катарында экөөсү тең оң болгондо же экөөсү тең терс болгондо гана оң болот. ЧЖА ны эске алып, салыштыруунун натыйжасында алымы

$X_1 = (-\infty,\ 3{,}5) \cup (3{,}5,\ \ 6] \cup [8, +\infty)$аралыктарында оң болот.

Бөлүмү $X_2 = (-\infty,\ 3{,}5)$ аралыгында терс болуп, **1 – учур**

$X_1 \cap X_2 = (-\infty,\ 3{,}5)$ аралыгында аткарылат.

2 – учур:алымы терс, бөлүмү оң$\begin{cases}(x-6)(x-8) \leq 0,\\ 2x\ -\ 7 > 0\ \ (бөлүмү\ нөл\ болбойт)\end{cases}$

Алымы терс болушу үчүн эки көбөйтүүчүлөрдүн бирөөсү терс, экинчиси оң болушу жетиштүү. Чиймеден карап, алымынын $X_3 = [6,\ 8]$аралыгында терс болорун, ал эми бөлүмүнүн $X_4 =]3{,}5, +\infty[$ аралыгында оң болорун көрөбүз.

Анда **2 – учур** $X_3 \cap X_4 = [6,\ 8] \cap]3{,}5, +\infty[=\ [6,\ 8]$ аралыгында гана аткарылат.

Ошентип барабарсыздыктын чыгарылышы катарында **1 – учур** менен **2 – учурлардын**

бирүүгүсүн $X =]-\infty,\ 3{,}5[\cup [6,\ 8]$ же (б) жообун алабыз.◄

9– МИСАЛ .$\frac{3x^2-27}{2x\ +7} <\ 0$барабарсыздыгын чыгаргыла.

Жооптор: (а)$(-3,\ 3)$;   (б)$(-3{,}5\ ,\ 3)$;   (в)$(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$;

(г)$(-\infty, -3{,}5) \cup (-3,\ 3)$;   (д) $(-3{,}5\ ,\ 3)$.

► ЧЫГАРУУ: Берилген барабарсыздыктын ЧЖА сы бөлчөктүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгон чекиттерден турат. Бөлүмдүн нөлү

$2x +\ 7 = 0\ \ \Leftrightarrow\ \ x = -3{,}5$ чекити болот. Демек, ЧЖА: $X =]-\infty, -3{,}5[\cup]-3{,}5, +\infty[$ же сан огундагы $x = -3{,}5$ чекитинен башка бардык чекиттер болот .

Жогорудагыдай эле, бөлчөк эки учурда терс болот.

1 – учур:алымы оң, бөлүмү терс $\begin{cases}3x^2 - 27 > 0,\\ 2x +\ 7 < 0\ .\end{cases}$

Алымын нөлгө теңдеп, $3x^2 - 27 = 0$ теңдештигин 3 кө бөлүп жиберсек, $x^2 - 9 = 0$ теңдештиги келип чыгып,

$x^2 = 9 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ сандары алымына нөлдөр болорун көрөбүз. Алымынын белгилерин чиймеден карап $|x| < 3 \;\Leftrightarrow\; (-3,\; 3) \Leftrightarrow$ болгондо терс, ал эми $|x| > 3 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{X}_1 = (-\infty, -3] \cup (3, +\infty]$ болгондо нөлдөн чоң болорун көрөбүз.

Алымы $\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{(+)} - 3 \underbrace{\qquad\quad 0 \qquad\quad}_{(-)} 3 \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{(+)}$;

Бөлүмү $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(-)} - 3{,}5 \overbrace{\qquad\qquad 0 \qquad\quad}^{(+)}$

Бөлүмү $\mathrm{X}_2 = (-\infty, -3{,}5)$ аралыгында терс болот.

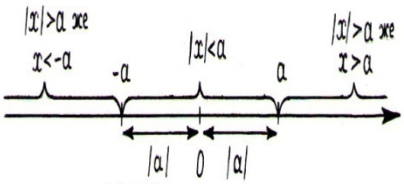
Анда **1 – учур (алымы оң, бөлүмү терс)** $\mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2 = (-\infty, -3{,}5)$ аралыгында аткарылат.

2 – учур:алымы терс, бөлүмү оң $\begin{cases} 3x^2 - 27 < 0, \\ 2x + 7 > 0 \;. \end{cases}$

Алымы $\mathrm{X}_3 = (-3,\; 3)$ аралыгында терс болот.

Бөлүмү $\mathrm{X}_4 = (-3{,}5, +\infty)$ аралыгында нөлдөн чоң болот. Анда (**алымы терс, бөлүмү оң)** экөөсү тең аткарылган

2 – учур $\mathrm{X}_3 \cap \mathrm{X}_4 = (-3, +3)$ аралыгы болот.



1.3-чийме

Барабарсыздыктын чыгарылышы **1 – учур менен 2 – учурдун** биригүүсү катарында

$(-\infty, -3{,}5) \cup (-3\;, 3)$ аралыгы болот. Туура жообу (г).◄

- ✓ a санынын абсолюттук чоңдугу (1.3 – чийме) деп, О чекитинен x чекитине чейинки аралыкты айтып, аны $|a|$ символу менен белгилейбиз. Чиймеден көрүнгөндөй О чекитинен a узактыгында жайгашкан эки $-a$ жана a чекиттер бар. Ошондуктан жалпы учурда a санынын абсолюттук чоңдугун

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{эгерде } a \geq 0 \text{ оң болсо,} \\ a, & \text{эгерде } a < \text{терс болсо} \end{cases} \quad \text{деп түшүнөбүз.} \qquad (7)$$

Мындан $|x| < a \iff -a < x < a$, анткени x тер О чекитинен a аралыгынан узак эмес жайгашарын, ал эми
$|x| > a \iff -\infty < x < -a$ жана $a < x < +\infty$, себеби x тер О чекитинен a аралыгынан узак жайгашарын көрөбүз (1.3 – чийме).

10– МИСАЛ .$\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+6} \geq 0$ барабарсыздыгынын чыгарылышын тапкыла.
Жооптору : (а)$(-\infty,\ 4] \cup\ [-1,\ 2) \cup (3,\ +\infty)$; (б)$[-4,-1] \cup (2,\ 3)$;
(в)$(-\infty,-4] \cup\ [-1\ \ 2\ ) \cup [3,+\infty)$; (г)$(-\infty,-3) \cup (-2,\quad 1]$;
(д)$(-3,-2] \cup\ [1,\quad 4)$.

► ЧЫГАРУУ: Барабарсыздыктын ЧЖА сы бөлчөктүн бөлүмү $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ нөлдөн айырмалуу болгон чекиттерден турат. Оболу бөлүмдүн нөлдөрүн

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \ \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \ \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$
$$= \frac{5 \ \pm \ 1}{2},$$

$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ жана $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$ аныктайлы. Чиймеде көрсөтүлгөндөй нөлдөр аркылуу өткөндө бөлүмдүн белгиси өзгөрүп турат. $x^2 - 5x + 6$ үч мүчөсүндө $a = 1 > 0$ болгондуктан у $= x^2 - 5x + 6$ функциясынын графигинин бутактары жогору карап, $0x$ огун $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ чекиттеринде жогору карай кесип өтүшөт.

Бөлүмү $\overbrace{\_\_\_\_\_\_0\_\_\_}^{(+)} 2 \underbrace{\_\_\_}_{(-)} 3 \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$;

Демек, барабарсыздыктын ЧЖА сы 2 жана 3 чекиттеринен башка бардык сан огу болот:
ЧЖА $= (-\infty,\ 2) \cup (2,\ 3) \cup (3,\ +\infty)$.

Бөлчөк эки учурда оң болот

1 – учур:алымы оң, бөлүмү оң болсо гана

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ (бөлүмү нөл болбойт)}, \\ x^2 + 5x + 4 \geq 0 . \end{cases}$$

Бөлүмү$X_1 = (-\infty,\ 2) \cup (3,\ +\infty)$ аралыгында оң болору чиймеден көрүнүп турат.

Алымын белгилерин аныктоо үчүн, анын нөлдөрүн табалы

$x^2 + 5x + 4 = 0 \ \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$,

$x_1 = \frac{-5+3}{2} = -1$ жана $x_2 = \frac{-5-3}{2} = -4$. $a = 1 > 0$ болгондуктан $y = x^2 + 5x + 4$ функциясынын графигинин бутактары жогору карап, $0x$ огун $x_1 = -1,\ x_2 = -4$ чекиттеринде жогору карай кесип өтүшөт

Алымы $\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)} -4 \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{(-)} -1 \overbrace{\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$.

Андай болсо, алымы болгон

$x^2 + 5x + 4$ квадраттык үч мүчө$X_2 = (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$ аралыгында оң болот.

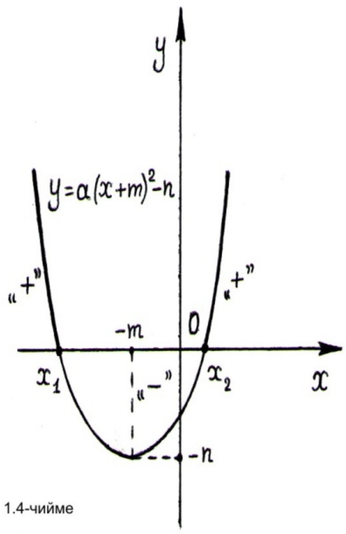
1 – учур: алымы менен бөлүмү оң болгон чекиттер:

$X_1 \cap X_2 = \{(-\infty,\ \ 2) \cup (3,\ \ +\infty)\} \cap \{(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)\} =$
$= (-\infty, -4] \cup [-1,\ 2\ ) \cup (3,\ +\infty)$ аралыгында жайгашат.

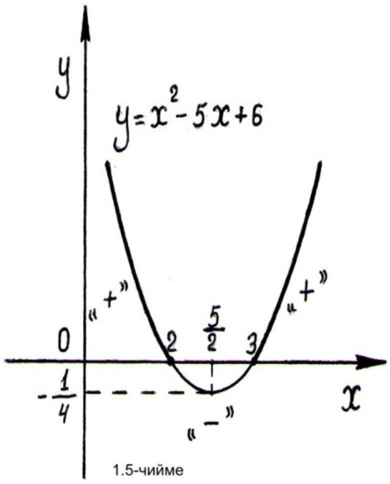
2 – учур:алымы терс, бөлүмү терс болсо

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \text{ (бөлүмү нөл болбойт)}, \\ x^2 + 5x + 4 \leq 0 . \end{cases}$$

Бөлүмү $X_3 = (2,\ 3)$ аралыгында, ал эми алымы $X_4 = [-1, -4]$ аралыгында терс болорун, тиешелүү чиймелерден көрөбүз.



1.4-чийме



1.5-чийме

Демек,**2 – учур**
$X_3 \cap X_4 = (2,\ 3) \cap [-1, -4] = \{\emptyset\}$
биргелешпеген болот.

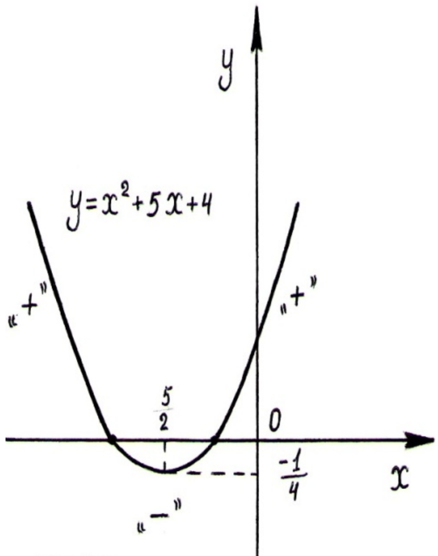
Ошентип барабарсыздыктын чыгарылышы катарында **1 – учурду** алабыз, же туура жообу$(-\infty, -4] \cup [-1,\ 2\ ) \cup (3,\ +\infty)$ аралыгы, б.а. (в).◄

- ✓ $y = a\,(x+m)^2 - n$ функциясынын графиги, $y = ax^2$ функциясынын графигинин чокусун О башталмасынан $(-m,\ +n)$ чекитине которуу менен ишке ашырылып (1.4 – чийме), $a > 0$ болсо бутактары жогору, ал эми $a < 0$ болсо бутактары төмөн караган парабола болот.

Мисалдагы функциялардын графиктерин тургузуп көрөлү.

$y = x^2 - 5x + 6 = \underbrace{x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{(1)-\text{ формула}} + 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ (1.5 – чийме).

$y = x^2 + 5x + 4 = \underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{(2)-\text{ формула}} + 6 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ (1.6 – чийме).



1.6-чийме

11– МИСАЛ .$\frac{x^2(x-2)}{8x+4} < 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Жооптор: (а) $\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$; (б) $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \cup (0,\ 2)$; (в) $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right) \cup (0,\ 2)$; (г)$(-2,\ 2)$; (д)$(-2,\ 0) \cup (0,\ 2)$.

► ЧЫГАРУУ: Барабарсыздык бөлчөк көрүнүшүндө болгондуктан, анын жашашы үчүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу болушу керек. Бөлүмүнүн нөлүн табалы $8x + 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ 8x = -4 \ \Leftrightarrow\ x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$. Демек, ЧЖА= $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$, б.а. $-\frac{1}{2}$ ден башка бардык сан огундагы чекиттер болушат.

Бөлчөк эки учурда терс болот.

1 – учур алымы терс, бөлүмү нөлдөнчоң болгондо:

Бөлүмүн $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(-)} -\frac{1}{2} \overbrace{\quad 0 \qquad\qquad}^{(+)}$

чиймеден карап, $X_1 = \left(-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ аралыгында оң болорун көрөбүз.

Алымы эки көбөйтүүчүдөн туруп, алардын бири x^2 көбөйтүүчүсү $x = 0$ чекитинде нөлгө тең болуп, башка бардык чекиттерде нөлдөн чоң болуп, алымынын белгисине таасирин тийгизбейт. Ошондуктан алымынын белгиси $(x - 2)$ көбөйтүүчүсүнүн белгисинен көз каранды болот. Анын нөлү $x = 2$ чекити болуп, $x < 2$ болгондо терс, ал эми $x > 2$ болгондо оң болот.

Алымы $\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\ -\frac{1}{2}\ \_\_\_\_ 0}_{(-)}\ \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{(-)}\ 2\ \overbrace{\_\_\_\_ 0 \_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}$.

Демек, алымы $X_2 = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ 2)$ аралыгында терс болот

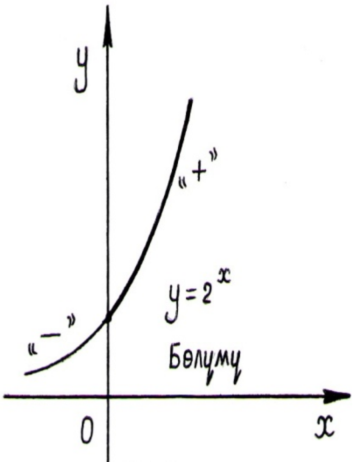
Анда **1 – учур алымы терс, бөлүмү оң** болгон абал $X_1 \cap X_2 = \left(-\frac{1}{2},\ 2\right) \cap \{(-\infty,\ 0) \cup (0,\ 2)\} = \left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \cup (0,\ 2)$ аралыгында сакталат.

2– учур алымы нөлдөн чоң, бөлүмү терс болгондо:

Алымы $x > 2$ же $(2,\ +\infty)$ аралыгында оң, бөлүмү $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$ аралыгында терс болот.

Анда **2 – учур алымы оң, бөлүмү терс** абал биргелешпейт же бош көптүк болот.

Жалпы чыгарылыш **1 – учур менен 2 – учурдун** биригүүсү катарында $X = \left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \cup (0,\ 2) \cup \{бош\} = \left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \cup (0,\ 2)$аралыктары болот. Туура жообу (б).◄



1.7-чийме

12 – МИСАЛ .$\frac{x-9}{2^x - 1} \geq 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Жооптор : (а)$[-9,\ 0)$; (б)$(-\infty, -9] \cup (0, +\infty)$; (в)$(9, +\infty)$; (г)$[0,\ 9)$; (д)$(-\infty,\ 0) \cup [9,\ +\infty)$.

► ЧЫГАРУУ: Барабарсыздык бөлчөк көрүнүшүндө болгондуктан, анын жашашы үчүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу болушу керек. Бөлүмүнүн нөлүн аныктайлы

$2^x - 1 = 0 \iff 2^x = 1 \iff 2^x = 2^0 \iff x = 0$. Демек,

ЧЖА $= (-\infty,\ 0) \cup (0, +\infty)$ же сан огундагы нөлдөн башка бардык чекиттер болушат.

Бөлчөк эки учурда оң болот. **1 – учур алымы менен бөлүмү оң:**

Бөлүмүндөгү $y = a^x = 2^x$функциясы $a = 2 > 1$ болгондо монотондуу өсүүчү болгондуктан (1.7 – чийме) $x > 0 \Rightarrow 2^x > 1$ болуп, $X_1 = (0,\ +\infty)$ аралыгында оң болот.

Алымынын нөлү $x - 9 = 0 \iff x = 9$ чекити болуп, $x \geq 9$ болгондо

же $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(-)} 9 \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{(+)}$,$X_2 = [9,\ +\infty)$аралыгында оң болот.

1 – учурдун жыйынтыгы $X_1 \cap X_2 = (0,\ +\infty) \cap [9,\ +\infty) = [9,\ +\infty)$аралыгы болот.

2 – учур алымы менен бөлүмү терс:

Бөлүмүндөгү $y = a^x = 2^x$функциясы $a = 2 > 1$ болгондо монотондуу өсүүчү болгондуктан (1.7 – чийме) $x < 0 \Rightarrow 2^x < 1$ болуп, $X_3 = (-\infty,\ 0)$ аралыгында терс болот. Алымы болсо $X_4 = (-\infty,\ 9]$ аралыгында терс болот (алымы нөлгө барабар боло бергендиктен мисалда аралыкка 9 кирет).

2 – учурду жыйынтыктап, $X_3 \cap X_4 = (-\infty,\ 0) \cap (-\infty,\ 9] = (-\infty,\ 0)$ аралыгында, барабарсыздык аткарыларын көрөбүз.

1 – учур менен 2 – учурду бириктирип, барабарсыздыктын чыгарылышы

$(-\infty,\ 0) \cup [9,\ +\infty)$ аралыгы же (д) болот.◄

13– МИСАЛ .$(3x^2 - 4x - 7)\log_3(2 - x) \geq 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Жооптор : (а)$(-\infty,\ 1] \cup \left(2,\ \frac{7}{3}\right]$;   (б)$[-1,\ 1] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$;   (в)$(-\infty, -1] \cup [1,\ 2)$

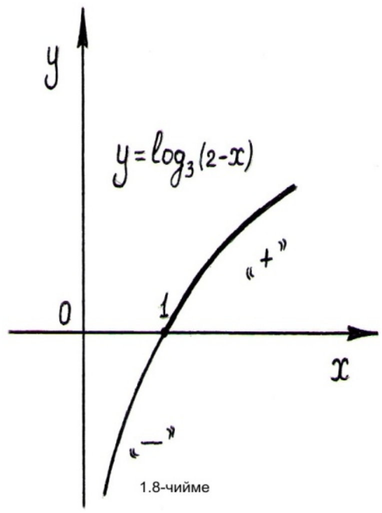
(г)$[1,\ 2)$;   (д)$[-1,\ 1] \cup (2, +\infty)$.

► ЧЫГАРУУ: Барабарсыздыкта логарифм катышып, анын жашашы үчүн логарифмдин белгисинин алдындагы туюнтма нөлдөн чоң болушу зарыл. Анткени логарифмдин аныктамасы боюнча $a^x = b$ көрсөткүчтүү теңдемесинин чечими, шарттуу түрдө $x = \log_a b$ деп белгиленген

$$a^x = b \ \Leftrightarrow \ x = \log_a b \ \text{ же } a^{\log_a b} = b. \qquad (8)$$

Ошентип, x тин ордуна $\log_a b$ ны койсок, көрсөткүчтүү теңдемени канааттандырат. Көрсөткүчтүү теңдемеде a негизине $a > 0,\ a \neq 1$ шарттары коюлгандыктан, $a^x > 0$ нөлдөн чоң болот. Анда нөлдөн чоң санга барабар болуп турган$b > 0$нөлдөн чоң болушу керек.

Барабарсыздыктагы логарифм жашашы үчүн, $2 - x > 0 \ \Leftrightarrow \ 2 > x$ шарты аткарылат деп эсептейбиз. Демек, барабарсыздыктын ЧЖА сы $(-\infty,\ 2)$ аралыгы болот (1.8 – чийме).



1.8-чийме

Эки сандын көбөйтүндүсү оң болушу үчүн, **алардын экөөсүнүн тең бир учурда оң болушу же терс болушу керек.**

1 – көбөйтүүчүнүн нөлдөрүн табалы

$3x^2 - 4x - 7 = 0 \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 3\cdot(-7)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{6} = \frac{4 \pm 10}{6}$,

$x_1 = \frac{4+10}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{4-10}{6} = \frac{-6}{6} = -1$. Үч мүчөдө$a = 3 > 0$болгондуктан параболанын бутактары жогору карап, $3x^2 - 4x - 7$ квадраттык үч мүчөсүнүн белгиси $x_1 = \frac{7}{3}$ менен $x_2 = -1$ дин арасында терс болуп(*нөлүнөн* кичине *жебарабар*), алардын сыртында (*нөлүнөн* чо*ңжебарабар*) оңболот

$$\overbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad} -1}^{(+)}\ \underbrace{\underline{\qquad\quad 0 \qquad\qquad}}_{(-)}\ \overbrace{\frac{7}{3}\underline{\quad\ 0 \qquad\quad}}^{(+)} \ .$$

Ошентип$(-\infty,\ -1] \cup \left[\frac{7}{3},\ +\infty\right)$ аралыгында оң же нөлдөн чоң же барабар. Ал эми

$\left[-1,\ \frac{7}{3}\right]$ аралыгында терс же нөлдөн кичине же барабар болот.

2 – көбөйтүүчүнүн нөлүн табалы

$\log_3(2-x) = 0 \ \Rightarrow\ 2-x = 3^0 \ \Rightarrow\ x = 2-1 = 1.$

$y = \log_3(2-x)$функциясында логарифмдин негизи $a = 3 > 1$ болгондуктан монотондуу өсүүчү болот, б.а. x чоңойсо чоңоюп, кичинерсе кичинерет. Демек,$x \geq 1$ болсо $[1, +\infty)$ аралыгында

$\log_3(2-x)\ \geq 0$ (нөлүнөн *чоңжебарабар*) $-$оңбелгиде,

$x \leq 1$ болсо $(-\infty,\ 1]$ аралыгында $\log_3(2-x)\ \leq 0$ (нөлүнөн кичине же барабар) $-$терсбелгиде болот (1.8 – чийме).

Андай болсо барабарсыздыктын чыгарылышы 1) Экөөсү тең оң болгон аралыктардын кесилишинде

$X_1 = \left\{(-\infty,\ -1] \cup \left[\frac{7}{3},\ +\infty\right)\right\} \cap [1, +\infty) = \left[\frac{7}{3},\ +\infty\right).$

2) Экөөсү тең терс болгон аралыктардын кесилишинде

$X_2 = \left[-1,\ \frac{7}{3}\right] \cap (-\infty,\ 1] = [-1,\ 1]$жайгашып,жалпы чыгарылыш эки учурдун биригүүсү болот

$X = X_1 \cup X_2 = [-1,\ 1] \cup \left[\frac{7}{3},\ +\infty\right)$ же (б) . ◄

14– МИСАЛ . $(2x-3)\sqrt{3x^2-5x-2}\ \geq 0$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

Жооптор : (а) $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3},\ \ 2\right)$; (б) $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) \cup (2,\ +\infty)$;

(в)$[2,\ +\infty)$; (г) $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)$; (д) $\left(-\frac{1}{3},\ 2\right)$.

► ЧЫГАРУУ: Эки сандын көбөйтүндүсү нөлдөн чоң же барабар болушу үчүн, алардын экоосунун тең бир учурда нөлдөн чоң же барабар, болбосо нөлдөн кичине же барабар болушу керек.

Экинчи көбөйтүндү квадраттык тамыр алдындагы туюнтманы кармап тургандыктан, анын ЧЖА сы же тамырынын жашашы үчүн туюнтма $3x^2 - 5x - 2 \geq 0$ оң болушу керек. Анын нөлдөрүн табалы

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6},$$

$x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$, $x_2 = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$. Үч мүчөдө$a = 3 > 0$болгондуктан параболанын бутактары жогору карап, $3x^2 - 5x - 2$ квадраттык үч мүчөсүнүн белгиси $x_2 = -\frac{1}{3}$ менен $x_1 = 2$ нин арасында терс болуп(*нөлүнөн* кичине *жебарабар*), алардын сыртында (*нөлүнөн* чо*ңжебарабар*) оңболот

$$\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ -\tfrac{1}{3}}^{(+)}\underbrace{\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_}_{(-)}\overbrace{2\_\_\_0\_\_\_\_\_\_}^{(+)} .$$

ОшентипЧЖА $= \left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right] \cup [2,\ +\infty)$ аралыгында оң, б.а. нөлдөн чоң же барабар болуп, квадраттык тамыр жашайт.

$\left(-\frac{1}{3},\ 2\right)$ аралыгында терс, б.а. нөлдөн кичине $3x^2 - 5x - 2 < 0$ болуп, бул аралыкта квадраттык тамыр жашабайт же бул аралык ЧЖА га кирбейт.

Биринчи $(2x - 3)$ көбөйтүндүсүнүн нөлү $x = \frac{3}{2}$ болуп, $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ аралыгында

$x \geq \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; (2x - 3) \geq 0$ оң, ал эми $\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right]$ аралыгында $x \leq \frac{3}{2} \;\Rightarrow$

$(2x - 3) \leq 0$ терс болот$\underbrace{______0_______}_{(-)}\tfrac{3}{2}\overbrace{____0_______}^{(+)}$.

Эки көбөйтүүчүнүн бир учурда терс болушу мүмкүн эмес, анткени оң сандын квадраттык тамыры катарында экинчи көбөйтүүчү дайыма оң болот. Ошондуктан эки көбөйтүүчүнүн тең бир учурда оң болгон аралыктарынын кесилишин алабыз. Анда туура жообу

$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \cap \left\{\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right] \cup [2,\ +\infty)\right\} = [2,\ +\infty)$ же (в) болот.◄

3. Теңдемелер системасын чыгаруу

15 – МИСАЛ . $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45,\\ \ x+y=5.\end{cases}$

Жооптор : (а) (4; 1); (б) (4; 1), (1; 4); (в) (-1; 6), (4; 1);

(г) (2; 3), (3; 2); (д) (5; 0) .

► ЧЫГАРУУ:

Каалагандай сандарды кошуп, кемитип, квадратка көтөрүп көбөйтүүгө болгондуктан, теңдемелер системасынын ЧЖА сы бардык сан огу болот.

$$m^2-n^2=(m-n)\cdot(m+n) \qquad (9)$$

Кыскача көбөйтүүнүн формуласын пайдаланып

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ ажыртууга болот. Бул ажыралышты теңдемелер системасындагы биринчи теңдемеге коюп, аны

$$(x-y)\cdot(x-y)\cdot(x+y)=45 \quad \Rightarrow \quad (x-y)^2\cdot(x+y)=45 \ \Rightarrow$$

$(x-y)^2\cdot 5=45$ же $(x-y)^2=9 \ \Rightarrow \ x-y=\pm\sqrt{9} \ \Rightarrow \ x-y=\pm 3$ көрүнүшүнө өзгөртө алабыз. Анда берилген теңдемелер системасын "$\pm$" белгисине карата эки теңдемелер системасына бөлүүгө болот:

1) $\begin{cases}x-y=3,\\ x+y=5.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=-3,\\ x+y=5.\end{cases}$

1) – чыгаруу. $\begin{cases}x-y=3,\\ x+y=5.\end{cases}$ эк*өө*с*ү*н кошуп, $2x=8 \ \Rightarrow \ x=4;$ мүчөлөп кемитип

$2у = 2 \Rightarrow у = 1$ болорун аныктап, (4 ; 1) түгөйүнүн чечим болорун көрөбүз.

2) – чыгаруу. $\begin{cases} x - y = -3, \\ x + y = 5. \end{cases}$ экөөсүн кошуп, $2x = 2 \;\; \Rightarrow \;\; x = 1;$ мүчөлөп кемитип,

$2у = 8 \Rightarrow у = 4$ болорун аныктап, (1 ; 4) түгөйүнүн чечим болорун көрөбүз. Демек,

туура жообу (4; 1) менен (1; 4) түгөйлөрү же (б) болот.◄

16 – МИСАЛ . $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ 2x - 4 < 0 \end{cases}$ барабарсыздыктар системасын чыгаргыла.

Жооптор : (а)$(-\infty,\ 1)$; (б)$(3, +\infty)$; (в)$(2,\ 3)$; (г)$(1,\ 2)$;

(д)$(-3, \quad 2)$.

► ЧЫГАРУУ: 1) Системадагы биринчи барабарсыздыкты чыгаралы. Ал үчүн анын нөлүн табалы

$x^2 - 4x + 3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$,

$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$, $x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Үч мүчөдө$a = 1 > 0$болгондуктан параболанын бутактары жогору карап, $x^2 - 4x + 3$ квадраттык үч мүчөсүнүн белгиси $x_2 = 1$ менен $x_1 = 3$ дин арасында терс болуп($нөлүнөн$ кичине), алардын сыртында ($нөлүнөн$ чо$ң$)

оңболот$\overbrace{________ 0 ______}^{(+)} 1 \underbrace{______ 2 ______}_{(-)} 3 \overbrace{____________}^{(+)}$.

Демек, чыгарылышы же нөлдөн кичине болуу шарты $X_1 = (1,\ 3)$ аралыгында аткарылат.

2) Системадагы экинчи барабарсыздык $2x - 4 = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x = 2$ чекитинде нөлгө тең, ал эми $x < 2$ болгондо $(-\infty,\ 2)$ аралыгында терс

(нөлдөн кичине), $x > 2$ болгондо $(2,\ +\infty)$ аралыгында оң (нөлдөн чоң)

болот $\underbrace{\quad 0 \qquad\qquad}_{(-)}\ 2\ \overbrace{\quad 0 \qquad\qquad}^{(+)}$.

Демек, нөлдөн кичине болуу шарты $X_2 = (-\infty,\ 2)$ аралыгында орун алат.

Берилген барабарсыздык шарттардын экөөсү тең аткарылганда орун алгандыктан, жалпы чыгарылыш $X = X_1 \cap X_2 = (1,\ 3) \cap (-\infty,\ 2) = (1,\ 2)$ аралыгы же $1 < x < 2$ шарты болот. Туура жообу (г) .◄

17 – МИСАЛ . $\begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{10}{x-y} = 1, \\ \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} = -\frac{3}{5} \end{cases}$ теңдемелер системасын чыгаргыла.

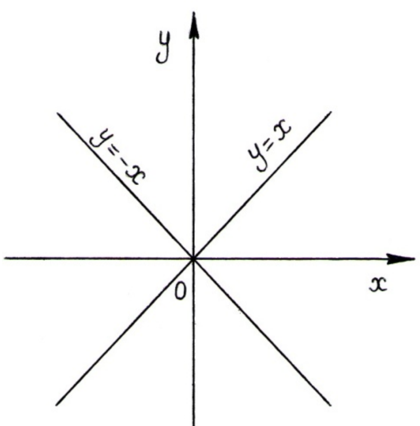
Жооптор : (а)$(-5{,}25;\ -2{,}25)$; (б)$(-5{,}25;\ 2{,}25)$; (в)$(5{,}25;\ -2{,}25)$;

(г)$(2{,}25;\ 5{,}25)$; (д)$(2{,}25;\ -5{,}25)$.

► ЧЫГАРУУ: Теңдемелер системасында бөлчөктөр катышкандыктан, алардын бөлүмдөрү нөлдөн айырмалуу болушу керек

$$\begin{cases} x + y \neq 0, \\ x - y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -y, \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow x \neq \pm y.$$

Демек, системанын ЧЖА сы координаттык тегиздиктин $y = x$ жана $y = -x$ түздөрүндө жатпаган бардык чекиттеринен турат (1.9 – чийме).



1.9-чийме

Теңдемелер сиситемасын $u = \frac{1}{x+y}$, $v = \frac{1}{x-y}$ белгилөөлөрүнүн жардамы менен $\begin{cases} u - 10v = 1, \\ u + 2v = -\frac{3}{5} \end{cases}$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп жазалы. Экинчисинен биринчисин кемитсек, $12v = -\frac{3}{5} - 1 \Rightarrow 12v = -\frac{8}{5} \Rightarrow v = -\frac{8}{12\cdot 5} = -\frac{8}{60} = -\frac{2}{15}$ келип чыгат.

Экинчисин 5 ке көбөйтүп, биринчисине кошсок,

$6u = -3 + 1 \quad \Rightarrow \quad 6u = -2 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{3}$ ээ болобуз. $u\,, v$ нын табылган маанилерин пайдаланып, $\begin{cases} \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{3}\,, \\ \frac{1}{x-y} = -\frac{2}{15} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = -3, \\ x - y = -\frac{15}{2} \end{cases}$ теңдемелер системасын түзөбүз.

Аны мүчөлөп кошуп $2x = -3 - \frac{15}{2} \quad \Rightarrow$

$2x = -\frac{21}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{21}{4} = -5{,}25$, биринчисинен экинчисин кемитип

$2y = -3 + \frac{15}{2} \quad \Rightarrow \quad 2y = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9}{4} = 2{,}25$

чыгарылыштарын табабыз.

Табылган $(x;\ y) = (-5{,}25\ ;\ \ 2{,}25)$ түгөйү ЧЖА га кирет жана туура жооп (б) болот.◄

§1.2 Функциялардын негизги касиеттери

1– МИСАЛ . $f(x) = \frac{3}{x^2-4}$ функциясынын аныкталуу областын (АО) тапкыла.

Жооптор : (а)$(-\infty,\ -2)$; (б)$(2, +\infty)$; (в)$(-2,\ 2)$;

(г)$R = (-\infty, +\infty)$; (д)$(-\infty, -2) \cup (-2,\ \ 2) \cup (2, +\infty)$.

►ТАБУУ. Рационалдык бөлчөк функциянын жашашы үчүн, анын бөлүмү нөлдөн айырмалуу болушу керек, анткени нөлгө бөлүү мүмкүн эмес. Бөлүмүнүн нөлүн таап $x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \Rightarrow \quad x = \pm 2$, аны функциянын жашоо аймагынан чыгарып салабыз. Демек, функциянын АО су ± 2 сандарынан башка бардык чыныгы сандар болушат

$\text{АО} = (-\infty, -2) \cup (-2,\ \ 2) \cup (2,\ +\infty)$. Туура жооп (д).

$$-\infty \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{АО}} -2 \underbrace{\_\_\_\_\text{о}\_\_\_\_\_}_{\text{АО}} 2 \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{АО}} +\infty\ .$$

(Берилген эреже – функция АО тын гана башка бир көптүккө чагылта алат)◄

2 – МИСАЛ . $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2-4}$ функциясынын аныкталуу областын тап.

Жооптор : (а) $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$; (б) $\left[-\frac{1}{2},\ 2\right)$; (в) $\left[-\frac{1}{2},\ 2\right) \cup (2,\ +\infty)$;

(г) R; (д) $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right] \cup (2,\ +\infty)$.

►ТАБУУ. Берилген функция чагылта ала турган көптүк же АО, же болбосо аныкталуу областы: 1) бөлчөктүн бөлүмү $x^2 - 4 \neq 0$ нөлдөн айырмалуу;

2) квадраттык тамыр алдындагы туюнтма, нөлдөн чоң же барабар $2x + 1 \geq 0$ шарттарын канааттандырган x чекиттеринен турат (нөлдүн тамыры нөл же жашайт).

Бөлүмүнүн нөлүн таап $x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$, аларды сан огунан чыгарып салабыз $X_1 = (-\infty, -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2, +\infty)$.

Алымында $2x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -\frac{1}{2}$ болгондо, $X_2 = \left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ аралыгында квадраттык тамыр жашайт.

Бөлүмү жана алымы жашашы үчүн эки учур тең аткарылышы керек, анда

$\text{АО} = X_1 \cap X_2 = \{(-\infty, -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2, +\infty)\} \cap \left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right) = \left[-\frac{1}{2},\ 2\right) \cup (2,\ +\infty)$болуп, туура жооп (в). ◄

3 – МИСАЛ . $f(x) = \lg\frac{2x+1}{x-1}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла (§2.18 – кара).

Жооптор : (а)$(0, +\infty)$; (б) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$; (в) $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$; (г) $\left[-\frac{1}{2},\ 1\right)$;

(д) $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.

►ТАБУУ. Логарифмдин негизи $a = 10$ болгон ондук логарифмдик функциянын жашашы үчүн, анын алдында турган туюнтма нөлдөн чоң болушу керек $\frac{2x+1}{x-1} > 0$.

Эскертүү: $\log_{10} A = \lg A$ *деп жазуу кабыл алынган.*

Ошентип берилген логарифмдик функциянын АО сун табуу маселеси $\frac{2x+1}{x-1} > 0$ барабарсыздыгын чыгаруу маселесине алынып келинет. Бул барабарсыздык бөлчөктөн тургандыктан, ал алымы менен бөлүмү бир учурда нөлдөн чоң же бир учурда нөлдөн кичине болгон учурларда гана нөлдөн чоң болот.

1 – учур: Алымы жана бөлүмү нөлдөн чоң.

Алымы $2x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{1}{2}$ же $X_1 = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ аралыгында нөлдөн чоң болот.

Бөлүмү $x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$ же $X_2 = (1, +\infty)$ аралыгында нөлдөн чоң болот.

Анда алымы менен бөлүмү нөлдөн чоң болгон 1 – учур

$X_1 \cap X_2 = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty)$ аралыгы болот.

2 – учур: Алымы жана бөлүмү нөлдөн кичине.

Алымы $2x + 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{1}{2}$ же $X_3 = \left(-\infty, \ -\frac{1}{2}\right)$ аралыгында нөлдөн кичине болот.

Бөлүмү $x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$ же $X_4 = (-\infty, \ 1)$ аралыгында нөлдөн кичине болот.

Анда алымы менен бөлүмү нөлдөн кичине болгон 2 – учур

$X_3 \cap X_4 = \left(-\infty, \ -\frac{1}{2}\right) \cap (-\infty, \ 1) = \left(-\infty, \ -\frac{1}{2}\right)$ аралыгында аткарылат.

Ошентип, каралган эки учурдун биригүүсүндө $\frac{2x+1}{x-1} > 0$ барабарсыздыгы аткарылып, $f(x) = \lg \frac{2x+1}{x-1}$ функциясы жашайт.

$\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ көптүгү болот. Туура жообу (б).◄

4– МИСАЛ . $f(x) = \frac{3x^2+4x-5x^3}{x(2-\sqrt{x+1})}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Жооптор : (а)R; (б)$[-1, +\infty)$; (в)$[-1,\ 0) \cup (0,\ 3) \cup (3, +\infty)$;

(г)$(-\infty, -1) \cup (-1,\ 0) \cup (0, +\infty)$; (д)$[0,\ 1]$.

►ТАБУУ. Берилген бөлчөк функциянын жашашы үчүн, биринчиден анын бөлүмү нөлдөн айырмалуу, экинчиден квадраттык тамыр алдындагы туюнтма оң болушу керек, ал эми алымына шарт коюлбайт, анткени ар кандай санды даражага көтөрүп, көбөйтүп, кошуп, кемитүүгө болот.

Демек, $\begin{cases} x(2-\sqrt{x+1}) \neq 0, \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ шарттарын канааттандырган x өзгөрүлмөлөрүнүн көптүгү, берилген функциянын АО сун түзөт.

1) Эки сандын көбөйтүндүсү нөлгө тең болбошу үчүн, алардын экөөсү тең бир учурда нөлгө барабар болбошу керек,

$\begin{matrix} x \neq 0 \text{ жана} \\ 2-\sqrt{x+1} \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x \neq 0 \text{ жана} \\ 2 \neq \sqrt{x+1} \end{matrix}$.

Экинчисинин эки жагын тең квадратка көтөрүп, $x+1 \neq 4$ же $x \neq 3$ табабыз. Ошентип бөлчөктүн бөлүмү $x \neq 0, x \neq 3$ болгондо нөлдөн айырмалуу болот.

2) Тамыр алдындагы туюнтма $x+1 \geq 0 \;\Rightarrow\; x+1 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -1$ болгондо $[-1, +\infty)$ аралыгында оң болот.

$$\underbrace{-\infty\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}-1\underline{\qquad}}_{1)}\,o\,\underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad}}_{1)}3\underset{1)}{\underline{\qquad\qquad\qquad}}+\infty$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}-1\underbrace{\underline{\qquad}\,o\,\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}_{2)}+\infty$$

Чиймеден карап, 1) – жана 2) – учурларынын кесилиши болгон

$[-1,\ 0) \cup (0,\ 3) \cup (3, +\infty)$ аралыгы, берилген функциянын АО су болорун көрөбүз.

Туура жообу (в).◄

5– МИСАЛ . $f(x) = \sqrt{9 - 2\sqrt{x}}$ функциясынын аныкталуу областын тапкыла.

Жооптор : (а) $\left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$; (б) $\left(-\infty,\ \frac{9}{2}\right]$; (в)$[0, +\infty)$; (г) $\left[0,\ \frac{9}{2}\right]$;

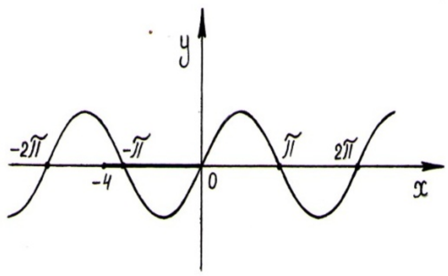
(д) $\left[0,\ \frac{81}{4}\right]$.

►ТАБУУ. Берилген иррационалдык функциянын жашашы үчүн, тамыр алдындагы туюнтмалардын оң болушу жетиштүү

$$\begin{cases} 9 - 2\sqrt{x} \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in [0, +\infty)\ .$$

Биринчиси $9 - 2\sqrt{x}\ \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{x}\ \leq 9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}\ \leq \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{81}{4}$ же $x \in \left(-\infty,\ \frac{81}{4}\right]$ аралыгында оң болот.

Демек, $\left(-\infty,\ \frac{81}{4}\right] \cap [0, +\infty)$ аралыктарынын кесилиши болгон $\left[0,\ \frac{81}{4}\right]$аралыгындаэки шарт теңаткарылгандыктан АО болуп, туура жообу (д).◄



1.10-чийме

6– МИСАЛ . $f(x) = \frac{3\sqrt{-x} + 2\sqrt{x+4}}{\sin x}$ функциясынын АО сун тапкыла.

Жооптор : (а)$[-4,\ 0]$; (б)$[-4,\ 0)$;

(в)$[-4, -\pi) \cup (-\pi,\quad 0)$;

(г)$x \neq \pi k,\ k \in Z$; (д)$(-\infty,\ \pi]$.

►ТАБУУ. Берилген бөлчөк функция жашашы үчүн, биринчиден квадраттык тамыр алдындагы туюнтмалар оң, экинчиден бөлчөктүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу болушу керек

$$\begin{cases} 1) -x \geq 0, \\ 2)\ x+4 \geq 0, \\ 3) \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ x \leq 0 \ \Rightarrow \ x \in (-\infty, \quad 0]\ , \\ 2) x+4 \geq 0 \ \Rightarrow \ x \geq -4 \ \Rightarrow \ x \in [-4, +\infty), \\ 3)\ \sin x \neq 0 \ \Rightarrow \ x \neq \pi k, \qquad k \in Z\ . \end{cases}$$

Каралган үч учурдун бардыгынын тең аткарылышы үчүн, алар аткарылган көптүктөрдүн кесилиштерин табабыз:

а) Оболу алымынын жашоо аймагын

$1) \cap 2) = (-\infty,\ 0] \cap [-4, +\infty) = [-4,\ 0]$ аныктайбыз

$$-\infty\ \underbrace{\_\_\_\_\_\_}_{(-)}\ \overbrace{\underbrace{-4 \quad -\pi\_\_\_\_\_\_}_{(+)}\ 0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{(+)}\ +\infty.$$

$\pi \approx 3{,}14$ болгондуктан $k = -1,\ k = 0$ болгон учурда гана $x =-\pi,\ x = 0$ сандары $[-4,\ 0]$ аралыгына кирип, калган $k = +1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$ маанилеринде $x = \pi k$ сандары $[-4,\ 0]$ аралыгынын сыртында калып, кесилиштери бош көптүктөр болушат.

Демек,$\sin x = 0$ болгон $x =-\pi$ менен $x = 0$ чекиттерин $[-4,\ 0]$ аралыгынан чыгарып салсак (1.10 – чийме), берилген функциянын

$\text{АО} = \big[-4,\ -\pi\big) \cup \big(-\pi,\ 0\big)$ көптүгү (аралыгы) болору келип чыгат.

Туура жообу (в)$[0, +\infty)$.◄

7– МИСАЛ . $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ функциясынын жуп же так болорун изилдегиле.

Жооптор : (а) жуп; (б) так; (в) жуп да, так да эмес.

►ИЗИЛДӨӨ. $f(x)$ функциясы аныкталуу областындагы бардык x чекиттеринде

$\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ **шартына баш ийсе, анда аны жуп функция** , ал эми

$\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ **шартына баш ийсе, анда так функция** дейбиз. Мисалдагы функция квадраттык тамырдан жана бөлчөктөн тургандыктан, алардын жашашы үчүн $\frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0$ жана $1 + x^2 \neq 0$ шарттары аткарылышы керек.

Бөлчөктүн бөлүмү x тин бардык маанилеринде оң сандардын суммасы катарында нөлдөн чоң болот. Демек, бөлчөк алымы оң болгондо гана нөлдөн чоң же барабар болот. Анда функциянын АО су $1 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$ аралыгы болот.

Берилген функцияны текшерсек

$$f(-x) = \sqrt{\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = f(x)$$ шарты аткарылып,

$\text{AO} = [-1,\ 1]$ аныкталуу областында жуп функция болорун көрөбүз. Туура жообу (а). ◄

8– МИСАЛ . $f(x) = 7x^3 + \sin\frac{x}{2}$ функциясынын жуп же так болорун изилдегиле.

Жооптор : (а) жуп; (б) так; (в) жуп да, так да эмес.

►ИЗИЛДӨӨ. Берилген функциянын аныкталуу областы бүтүндөй сан огу болот. Анткени каалагандай санды даражага көтөрүүгө жана синусун эсептөөгө болот. Аныкталуу областынан "$-x$" жана x сандарын эркин тандап, синустун так функция болорун эске алып,

$$f(-x) = 7(-x)^3 + \sin\frac{(-x)}{2} = -7x^3 - \sin\frac{x}{2} = -\left(7x^3 + \sin\frac{x}{2}\right) = -f(x)$$

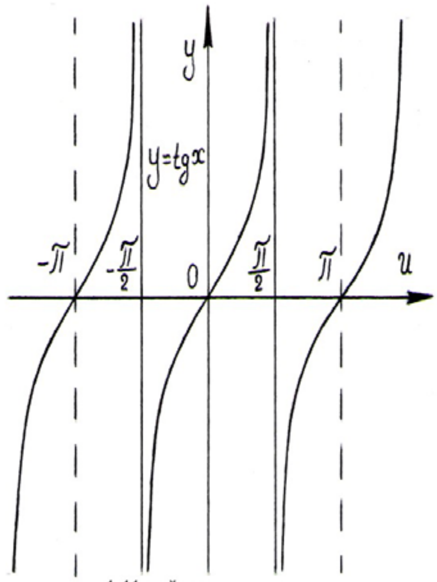
текшерсек, анын так функция болорун көрөбүз. Туура жообу (б).◄

9– МИСАЛ . $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ функциясынын жуп же так экендигин изилдегиле.

Жооптор : (а) жуп; (б) так; (в) жуп да, так да эмес.

►ИЗИЛДӨӨ. Тангенс $tg\,u$ функциясы аныкталуу областына кирбеген $u \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$чекиттеринен башка ($k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$), сан огундагы чекиттерде $tg(-u) = -tg\,u$ шартын канааттандырып, так функция болот (1.11 – чийме).

Берилген функция $f(-x) = tg\left((-x) - \frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq \pm f(x)$ жуп же так болуу шарттарына баш ийбегендиктен, жуп эмес жана так эмес функция болот.



1.11-чийме

Туура жообу (в).◄

10– МИСАЛ . $f(x) = 2\sin x \cos 3x\ tg\ 5x$ функциясынын жуп же так экендигин изилде.

Жооптор : (а) жуп; (б) так; (в) жуп да, так да эмес.

►ИЗИЛДӨӨ. Берилген функциянын аныкталуу областы (АО) сан огундагы $5x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$ же

$x \neq \frac{\pi}{10}(2k+1)$ чекиттеринен башка ($k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \dots$), бардык чекиттер болушуп синус, косинус, тангенс функцияларынын көбөйтүндүлөрүнөн турат.

Синус функциясы $\sin(-x) = -\sin x$ так , косинус $\cos 3(-x) = \cos 3x$ жуп, $tg\ 5(-x) = -tg\ 5x$ так функциялар болушат.

Мисалдагы функция

$$f(-x) = 2\sin(-x) \cdot \cos 3(-x) \cdot\ tg\ 5(-x) =$$

$= 2(-\sin x) \cdot (\cos 3x) \cdot (-tg\ 5x) = 2\sin x \cos 3x\ tg\ 5x = f(x)$ шартын канааттандырып эки так, бир жуп функциялардын көбөйтүндүсү катарында жуп функция болот.

Туура жообу (а). ◄

11– МИСАЛ . $f(x) = x^3 \sin(x + |x|)$ функциясынын жуп же так экендигин изилде.

Жооптор : (а) жуп; (б) так; (в) жуп да, так да эмес.

►ИЗИЛДӨӨ.► Мисалдагы функциянын аныкталуу областы бүтүндөй сан огу же бардык R чыныгы сандардын көптүгү болот, анткени каалагандай санды даражага көтөрүүгө жана синусун эсептөөгө болот.

Биринчи көбөйтүүчү $(-x)^3 = -x^3$ так функция болот.

Экинчи көбөйтүүчү

$$f(-x) = \sin\big((-x) + |-x|\big) = \sin(-x + |x|) = -\sin(x - |x|) \neq$$

$\neq \sin(x + |x|) = f(x)$ болгондуктан, жуп эмес жана так эмес функция болот.

Анда берилген функция, так функция менен жуп эмес жана так эмес функциянын көбөйтүндүсү катарында жуп эмес жана так эмес

$$f(-x) = (-x)^3 \sin\big((-x) + |-x|\big) = -x^3 \sin(-x + |-x|) =$$

$= x^3 \sin(x - |x|) \neq \sin(x + |x|) = f(x)$функция болот.

Туура жообу (в).◄

§1.3 Иррационалдык теңдемелер жана барабарсыздыктар

1. Теңдемелерди чыгаргыла

1 – МИСАЛ . $\sqrt{61 - x^2} = 5$ теңдемени чыгаргыла.

Жооптор (а)чыгарылышы жок; (б) $\pm\sqrt{86}$; (в) ± 6; (г) -6; (д) 6 .

►ЧЫГАРУУ : Теңдеме иррационалдык туюнтманы (тамырды) кармап тургандыктан, анын ЧЖА сы $61 - x^2 \geq 0$ шартын канааттандырган x өзгөрүлмөлөрүнүн көптүгү

$61 - x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \leq 61 \;\Leftrightarrow\; |x| \leq \sqrt{61} \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{61} \leq x \leq \sqrt{61}$ болот

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ -\sqrt{61}\underbrace{\_\_\_\_ -6 \_\_\_\_ \text{o} \_\_\_\_ +6 \_\_\_\_}_{\text{ЧЖА}}\sqrt{61}\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

Теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп,

$$\left(\sqrt{61 - x^2}\right)^2 = 5^2 \quad \Rightarrow \quad 61 - x^2 = 25 \quad \Rightarrow x^2 = 61 - 25 \quad \Rightarrow$$

$x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$чечимдерин табабыз. Табылган чечимдер теңдеменин ЧЖА сына киргендиктен туура жообу (в). ◄

2– МИСАЛ . $\sqrt{x + 2} + 4 = 0$ теңдемени чыгар.

Жооптор : (а) 18; (б) 6 ; (в) ± 18; (г) 4 ; (д) чыгарылышы жок.

►ЧЫГАРУУ : Теңдемедеги тамыр алдындагы туюнтма $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ болгондо жашап, оң сан болот жана тамырдан оң сан чыгат. Экинчи жактан $4 > 0$ да оң сан. Ошондуктан x тин кандай маанисинде болсо да, эки оң сандын суммасы нөлгө тең боло албайт (нөлдөн чоң). Туура жообу (д). ◄

3– МИСАЛ . $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$ теңдемени чыгар.

Жооптор : (а) $-1,\ 6$; (б) -1; (в) -6 ; (г) -2 ; (д) чыгарылышы жок.

►ЧЫГАРУУ : Берилген иррационалдык теңдеменин чыгарылыштары, квадраттык тамыр алдындагы туюнтма $4 - 6x - x^2 \geq 0$ болгондо гана жашайт. Оболу анын нөлдөрүн аныктайлы

$$4 - 6x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} =$$

$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 16}}{-2} = \frac{6 \pm \sqrt{52}}{-2}$, $x_1 = \frac{-6 - \sqrt{52}}{2}$, $x_2 = \frac{-6 + \sqrt{52}}{2}$. x^2 тын коэффициенти $a = -1 < 0$ болгондуктан $y = 4 - 6x - x^2$функциясынын графиги болгон параболанын бутактары төмөн карап, эки чечимдин арасында гана оң болот. Демек, теңдеменин

ЧЖА сы $-6{,}5 \approx \frac{-6 - \sqrt{52}}{2} \leq x \leq \frac{-6 + \sqrt{52}}{2} \approx \frac{1}{2}$ аралыгы болот. Мындан сырткары теңдеменин оң жагындагы туюнтма квадраттык тамырдын мааниси катарында оң болушу керек. Ошондуктан кошумча $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$ шарты коюлат.

Теңдемени иррационалдуулуктан куткаруу үчүн эки жагын тең квадратка көтөрүп,

$$\left(\sqrt{4-6x-x^2}\right)^2 = (x+4)^2 \quad \Rightarrow \quad 4-6x-x^2 = x^2+8x+16 \quad \Rightarrow$$

$2x^2 + 14x + 12 = 0$ ээ болобуз. Анын эки жагын тең $2 \neq 0$ санына бөлүп жиберсек, теңдемени түзгөн теңдештик бузулбай, берилген иррационалдык теңдеме $x^2 + 7x + 6 = 0$ көрүнүшүндөгү квадраттык теңдемеге теңдеш өзгөртүлүп түзүлөт. Аны чыгарып

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6}}{2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$= \frac{-7 \pm 5}{2}$, $x_1 = \frac{-7-5}{2} = -6$, $x_2 = \frac{-7+5}{2} = -1$ чечимдерин табабыз.

$$\_\_\_\_\_\_ \underbrace{-6{,}5\_\_\_ -6\_\_\_ \underbrace{-4\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ -1\_\_\_\_\_0\_\_\_\tfrac{1}{2}}_{\text{кошум. шарт}}}_{\text{ЧЖА}}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Табылган эки чечим тең ЧЖА га киргени менен $x_2 = -1$ гана кошумча шартка баш ийип, чечим боло алат. Туура жообу (б) -1.◄

4– МИСАЛ . $\sqrt{3x^2 - 2x - 2} = \sqrt{4x^2 - 5x}$ теңдемесин чыгаргыла.

Жооптор: (а)1, 2; (б) -1; (в)2 ; (г) -2 ; (д) чыгарылышы жок.

►ЧЫГАРУУ : Оң сандардан гана квадраттык тамыр чыккандыктан, берилген теңдеме $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 \geq 0, \\ 4x^2 - 5x \geq 0 \end{cases}$ шарттары аткарылганда жашайт.

Биринчисинин нөлдөрү $3x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}, \; x_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3},$$

$x_2 = \frac{2+4}{6} = 1$ чекиттери болушат.

у $= 3x^2 - 2x - 2$ функциясында $a = 3 > 0$ болгондуктан, функциянын графиги болгон параболанын бутактары жогору карайт. Анда

$$-\infty \underbrace{\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} -\tfrac{1}{3}}_{(+)\mathrm{X}_1} \overbrace{\text{\_\_\_}0\text{\_\_\_\_\_\_\_}}^{(-)} \underbrace{1\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}}_{(+)\mathrm{X}_1} + \infty$$ болуп,

ал$\mathrm{X}_1 = \left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right] \cup [1,\ +\infty)$ аралыгында жашайт.

Экинчисинин нөлдөрү $4x^2 - 5x = 0 \ \Rightarrow\ x(4x-5) = 0$, эки сандын көбөйтүндүсү катарында, алардын бирөөсү $x_1 = 0$ же $x_2 = \frac{5}{4}$ болгондо аныкталат. $a = 4 > 0$ болгондуктан, у $= 4x^2 - 5x$ функциясынын графиги болгон параболанын бутактары жогору карап, $x_1 = 0$ менен $x_2 = \frac{5}{4}$ нөлдөрүнүн сыртында же

$\mathrm{X}_2 = (-\infty,\ 0] \cup \left[\frac{5}{4},\ +\infty\right)$ аралыгында гана оң боло алышат

$$-\infty \underbrace{\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}0}_{(+)\mathrm{X}_2} \overbrace{\text{\_\_\_\_}}^{(-)} \underbrace{\tfrac{5}{4}\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}}_{(+)\ \mathrm{X}_2} + \infty\ .$$

Теңдеменин чыгарылышынын жашоо аймагы, эки шартты тең канааттандырууга тийиш, ошондуктан теңдеменин

ЧЖА сы $= \mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2 = \left\{\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right] \cup [1,\ +\infty)\right\} \cap \left\{(-\infty,\ 0] \cup \left[\frac{5}{4},\ +\infty\right)\right\} =$

$= \left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{4},\ +\infty\right)$ аралыгы болот

$$-\infty \underbrace{\text{\_\_\_\_\_\_\_\_} -\tfrac{1}{3}}_{\text{ЧЖА}}\text{\_\_}0\text{\_\_\_\_\_} \underbrace{\tfrac{5}{4}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}}_{\text{ЧЖА}} + \infty\ .$$

Теңдемени иррационалдуулуктан куткаруу үчүн, эки жагын тең квадратка көтөрүп

$$\left(\sqrt{3x^2 - 2x - 2}\right)^2 = \left(\sqrt{4x^2 - 5x}\right)^2 \ \Rightarrow\ 3x^2 - 2x - 2 = 4x^2 - 5x \ \Rightarrow$$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ теңдемесине өзгөртүп түзөбүз. Аны чыгарсак,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot1\cdot2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$= \frac{3 \pm 1}{2}$, $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$, $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$ чечимдерине ээ болобуз. Табылган чечимдердин ЧЖА га кирерин текшерсек,

$$\underbrace{-\infty \_\_\_\_\_\_ -\tfrac{1}{3}}_{\text{ЧЖА}}\_\_0\_\_\_\_1\_\_\underbrace{\tfrac{5}{4}\_\_2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ +\infty}_{\text{ЧЖА}}$$ бир

гана $x_2 = 2$ чечиминин ЧЖА га кирерин көрөбүз. Туура жообу (в) 2.◄

5– МИСАЛ . $2\sqrt{x+5} = x+2$ теңдемени чыгар.

Жооптор : (а) ± 4; (б) ± 1; (в)1; (г) 4 ; (д) чыгарылышы жок.

►ЧЫГАРУУ : Теңдеменин ЧЖА сы $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \Rightarrow$ $[-5, +\infty)$ аралыгы болот. Бирок, теңдеменин оң жагы оң сандын квадраттык тамырына тең болгондуктан, $x + 2 \geq 0$ же $x \geq -2$ деген кошумча шарт коюлат. Мында "[ ]" – квадраттык кашаа – учку чекит аралыкка таандык, ал эми "( )" – жөнөкөй кашаа – учку чекит аралыкка кирбейт дегенди түшүндүрөт.

Иррационалдуулуктан куткаруу үчүн теңдеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп,

$$\left(2\sqrt{x+5}\right)^2 = (x+2)^2 \quad \Rightarrow \quad 4(x+5) = x^2 + 4x + 4 \quad \Rightarrow$$

$x^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ чечимдерин табабыз. Табылган чечимдер чыгарылыштын жашоо аймагына (ЧЖА) киргени менен бирөөсү $x = +4$ гана кошумча шартка баш ийип чечим боло алат.

$$-\infty \underbrace{-5\_\_\_\_ -4\_\_\_\_\_ \underbrace{-2\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_4\_\_\_\_\_}_{\text{кошум.шарт}}}_{\text{ЧЖА}} +\infty .$$

Туура жообу (г) 4.◄

6– МИСАЛ . $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$ теңдемени чыгар.

Жооптор : (а) -1; (б) $-1,\ 2$; (в)2; (г) $-2,$ 1; (д) чыгарылышы жок.

►ЧЫГАРУУ : Оң сандангана квадраттык тамыр алууга болгондуктан

$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2, x \in [-2, +\infty) \\ x \leq 3 \quad \Rightarrow x \in (-\infty,\ 3] \end{cases}$, теңдеменин ЧЖА сы

$[-2, +\infty)$ менен $(-\infty,\ 3]$ аралыктарынын кесилиши болгон

ЧЖА $= (-\infty,\ 3] \cap [-2, +\infty) = [-2,\ 3]$ аралыгы болот (чиймесин сызып көр).

Теңдемени чыгаруу үчүн $\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{3-x}$ көрүнүшүндө көчүрүп жазып, эки жагын тең квадратка көтөрсөк,

$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = \left(3-\sqrt{3-x}\right)^2 \Rightarrow x+2 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{3-x} + (\sqrt{3-x}\,)^2$ же $x+2 = 9 - 6\sqrt{3-x} + 3 - x$ теңдемесине өзгөрүп, топтоштурган соң$10 - 2x = 6\sqrt{3-x}$ көрүнүшүндөгү иррационалдык теңдеме болот. Анын эки жагын тең квадратка көтөрүп

$$(10-2x)^2 = \left(6\sqrt{3-x}\right)^2 \Rightarrow 10^2 - 2\cdot 10\cdot(2x) + (2x)^2 =$$

$= 36\,(3-x)$ топтоштурсак,

$4x^2 - 40x + 100 = 108 - 36x \Rightarrow 4x^2 - 4x - 8 = 0$ (4 кө бөлүп)

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$,иррационалдыктан куткарылган квадраттык теңдеме келип чыгат. Анын чечимдери

$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$, $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$, $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$ сандары болушат. Алардын экөөсү тең теңдеменин ЧЖА сына кирип

$\_\_\_ {-6} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \underbrace{-2 \_\_\_\_ -1 \_\_\_ 0 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_ 3}_{\text{ЧЖА}} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, туура

жообу (б) $-1,\ 2$.◄

7– МИСАЛ . $(2x-3)\sqrt{3x^2-5x-2} = 0$теңдемесин чыгар.

Жооптор : (а) $\frac{3}{2}$; (б) $-\frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ 2$; (в) $-2,\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{2}$; (г)$2,\ -\frac{1}{3}$;

(д) чыгарылышы жок.

►ЧЫГАРУУ : Оң сандын гана квадраттык тамыры жашагандыктан, $3x^2-5x-2\geq 0$ нөлдөн чоң же барабар болушу керек (нөлдүн тамыры нөл). Оболу берилген квадраттык үч мүчөнүн нөлдөрүн табалы

$$3x^2-5x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{6}=$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{5\pm 7}{6},\ x_1=\frac{5+7}{6}=2,\quad x_2=\frac{5-7}{6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

Квадраттык үч мүчөдө $a>0$ болгондуктан $y=3x^2-5x-2$ функциясынын графиги болгон парболанын бутактары жогору карап, $0x$ огун $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{3}$ нөлдөрүндө кесип өтүп, нөлдөрдүн арасында терс, ал эми алардын сыртында оң белгилерге ээ болот

$$-\infty\ \overbrace{\rule{3cm}{0.4pt}}^{\text{ЧЖА "+"}}\ -\tfrac{1}{3}\ \underbrace{\rule{1cm}{0.4pt}0\rule{3cm}{0.4pt}\tfrac{3}{2}\rule{2cm}{0.4pt}}_{\text{"−"}}\ \overbrace{2\rule{4cm}{0.4pt}}^{\text{ЧЖА "+"}}+\infty.$$

Берилген теңдеме эки сандын көбөйтүндүсүнөн тургандыктан, алардын бирөөсү эле нөлгө барабар болсо, теңдеме чечилген болот. Анда теңдеменин

$$\begin{cases}2x-3=0,\\ \sqrt{3x^2-5x-2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=3,\\ 3x^2-5x-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}=1{,}5,\\ x_1=2,\ x_2=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

үч чечимдерин табабыз. Табылган чечимдердин бирөөсү $x=\frac{3}{2}$, теңдеменин ЧЖА сына кирбейт. Туура жообу (г) же 2, $-\frac{1}{3}$.◄

2. Функциялардын графиктериндеги жалпы чекиттерди тапкыла

8 – МИСАЛ . $y=\frac{1}{2}x+5$ менен $y=\sqrt{1-2x}$ функцияларынын жалпы чекиттерин тапкыла.

Жооптор :

$(а)(-24;\ -14)$, $(б)(-24;\ -7)$, $(в)(-4;\ 6)$, $(г)(-4;\ 3)$,

$(д)(-24;\ -7)$, $(-4;\ 3)$.

► ТАБУУ: Функциялардын графиктериндеги жалпы чекиттер, алардын графиктеринин кесилишүү чекиттери болгон же болбосо графиктери дал келген учурларда табылат. Функциялардын аныкталуу областтарын аныктап алалы : $y = \frac{1}{2}\ x + 5$ функциясынын АО су $R = (-\infty, +\infty) -$ бүтүндөй сан огу же бардык чыныгы сандар болот .

$y = \sqrt{1 - 2x}$ функциясынын АО су $1 - 2x \geq 0 \quad ⇨ \quad x \leq \frac{1}{2}$ болгон $X = \left(-\infty,\ \ \frac{1}{2}\right]$ аралыгы болот.

Эгерде эки функция жалпы чекиттерге ээ болсо, анда алар эки функцияга тең аныкталуу область боло алган

$R \cap X = (-\infty, +\infty) \cap \left(-\infty,\ \ \frac{1}{2}\right] = \left(-\infty,\ \ \frac{1}{2}\right] =$ ЧЖА аралыгына таандык болгонабциссасыx болгон чекиттер болушу мүмкүн.

Кесилишүү чекиттеринде эки функциянын маанилери барабар. Ошондуктан аларды теңдештирип, $\sqrt{1 - 2x} = \frac{1}{2}\ x + 5$ ирационалдык теңдемесине ээ болобуз. Теңдеменин жашоо аймагы (ЧЖА) функциялардын АО суна кошумча $\frac{1}{2}\ x + 5 \geq 0$ деген шартты коюу менен аныкталат, анткени ал оң сандын квадраттык тамыры катарында оң сан болушу керек. Мындан $x \geq -10$ болсун деген кошумча шарт келип чыгат.

Теңдемени чыгаруу үчүн, эки жагын тең квадратка көтөрүп

$$\left(\sqrt{1 - 2x}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\ x + 5\right)^2 \quad ⇨ \quad 1 - 2x = \left(\frac{1}{2}\ x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x \cdot\ 5 + 25$$

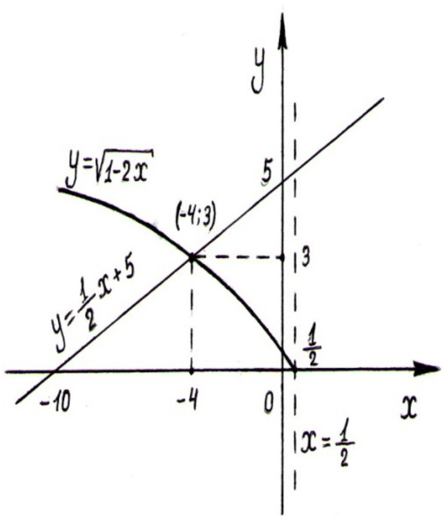
$⇨\ \ 1 - 2x = \frac{1}{4}x^2 +\ 5x + 25 \quad ⇨ \quad \frac{1}{4}x^2 + 7x + 24 = 0$ же $4 \neq 0$ санына көбөйтүп (теңдештиктин эки жагын бир учурда нөлдөн айырмалуу санга көбөйтүүдөн, бөлүүдөн теңдештик бузулбайт, теңдеме да чыгарылыштарын (нөлдөрүн) жоготпойт), $x^2 + 28\,x + 96 =$

0 квадраттык теңдемесине ээ болобуз. Аны $b = 28$ жуп сан болгон учурун колдонуп чыгарсак

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = -14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 1 \cdot 96} =$$

$= -14 \pm \sqrt{100} = -14 \pm 10$,$x_1 = -14 + 10 = -4$,

$x_2 = -14 - 10 = -24$ чечимдерин табабыз. Табылган эки чечимдердин бирөөсү $x_1 = -4$ теңдеменин ЧЖА сына, кошумча шартка баш иет жана функциялардын АО суна да киргендиктен кесилишүү чекиттерине абцисса боло алат.



1.12-чийме

$x_1 = -4$ чекитинде функциянын маанилери барабар болгондуктан, берилген эки функциянын каалаган биринин ушул чекиттеги маанисин тапсак, анда кесилишүү чекитинин ординатасын тапкан болобуз

$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + 5 = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 5 = -2 + 5 = 3\,.$$

Анда функциянын графиктериндеги жалпы чекит $(-4;\ 3)$ координаталуу чекит болот (1.12 – чийме). Туура жообу (г)$(-4;\ 3)$. ◄

9 – МИСАЛ. $y = -1 - 2x$ менен $y = \sqrt{2x+3}$ функцияларынын жалпы чекиттерин тапкыла.

Жооптор :
(а) $\left(-\frac{1}{2};\ -2\right), (-1;\ 1)$, (б) $\left(\frac{1}{2};\ -2\right)$, (в)$(-1;\ 1)$, (г)$(3;\ 3)$,

(д) $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, $(-1;\ 1)$.

► ТАБУУ: Биринчи функциянын аныкталуу областы бүтүндөй сан огу же $(-\infty, +\infty)$ аралыгы болот. Экинчиси $2x + 3 \geq 0$ же $x \geq -\frac{3}{2}$ шарты аткарылган $\left[-\frac{3}{2},\ +\infty\right)$ аралыгында аныкталат.

Кесилишүү чекиттеринде эки функциянын маанилери барабар. Ошондуктан аларды теңдештирип, $\sqrt{2x+3} = -1 - 2x$ иррационалдык теңдемесине ээ болобуз. Теңдеменин оң жагы же биринчи функция квадраттык тамырдын маанисине тең болгондуктан, теңдемеге функциялардын аныкталуу областарынан сырткары

$-1-2x \geq 0$ оң сан же $x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$ аралыгына таандык шарты коюлат. Ошондуктан графиктердеги жалпы болгон чекиттердин x абсциссалары ушул шарттар аткарылган гана аралыктардын

$\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right] \cap \left[-\frac{3}{2},\ +\infty\right) = \left[-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right]$ кесилишинде жайгаша алат.

Теңдемени чыгаруу үчүн, анын эки жагын тең квадратка көтөрүп

$$\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = (-1-2\,x)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x+3 = (-1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot(-2\,x) +$$

$$+(-2\,x)^2 \ \Rightarrow 2x+3 = 1+4x+4x^2 \ \Rightarrow \ 4x^2 + 2x - 2 = 0\,,$$

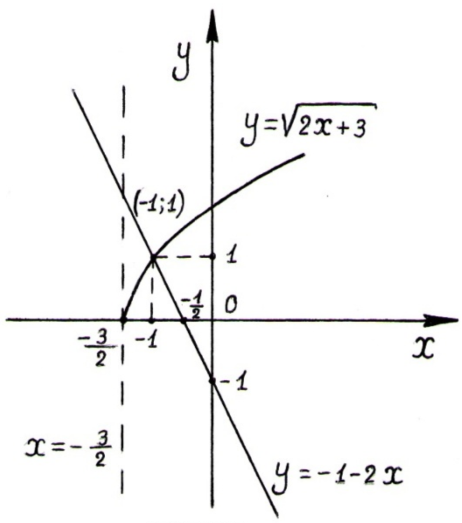
квадраттык теңдемесине ээ болобуз. Аны $2 \neq 0$ санына бөлүп (теңдештиктин эки жагын бир учурда нөлдөн айырмалуу санга көбөйтүүдөн, бөлүүдөн теңдештик бузулбайт, теңдеме да чыгарылыштарын (нөлдөрүн) жоготпойт), $2x^2 + x - 1 = 0$ көрүнүшүнө келтирип чыгарсак,

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}\,,\ x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2},$$

$x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$ чечимдери табылат. Чечимдердин ЧЖА га кирерин текшерели

$$\underline{\qquad\qquad}\underbrace{-\tfrac{3}{2}\ \_\ -1\_\_\_\_\ -\tfrac{1}{2}}_{\text{ЧЖА}}\_\_\_\_0\_\_\_\_\tfrac{1}{2}\underline{\qquad\qquad}\,.$$

Табылган эки чечимдин бирөөсү $x_2 = -1$ гана теңдеменин ЧЖА сына же функциялардын АО суна кирип, кесилишүү чекиттерине абсцисса боло алат.



1.13-чийме

$x_2 = -1$ чекитинде функциянын маанилери барабар болгондуктан, берилген эки функциянын каалаган биринин ушул чекиттердеги маанилерин тапсак, анда кесилишүү чекитинин ординатасын тапкан болобуз $у_2 = -1 - 2x_2 = -1 - \ 2 \cdot (-1) = 1.$

Демек, функциянын графиктериндеги жалпы чекит $(-1; \ \ 1)$ чекити болот (1.13 – чийме).

Туура жообу (в)$(-1; \ \ 1)$.◄

3. Барабарсыздыктарды чыгаргыла

10 – МИСАЛ . $\sqrt{61 - x^2} \leq 5$ барабарсыздыгын чыгар.

Жооптор : (а)$[-6, \ 6]$; (б)$(-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$;

(в)$\left(-\sqrt{61}, \ -6\right) \cup \left(6, \ \sqrt{61}\right)$; (г) $\left[-\sqrt{61}, \ 6\right] \cup \left[6, \ \sqrt{61}\right]$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздыктын чыгарылыштарынын жашоо аймагы (ЧЖА), $61 - x^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 \leq 61 \ \ \Leftrightarrow \ \ |x| \leq \sqrt{61} \ \ \Leftrightarrow$

$-\sqrt{61} \leq x \leq \sqrt{61} \quad \Rightarrow \quad x \in \left[-\sqrt{61}, \ \sqrt{61}\right]$ аралыгы болот. Анткени оң сандын гана квадраттык тамыры жашайт.

$$\_\_\_\_\_\underbrace{\overbrace{-\sqrt{61}\_\_\_-6}^{\text{Чыгарылыш}}\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\overbrace{6\_\_\_\sqrt{61}}^{\text{Чыгарылыш}}}_{\text{ЧЖА}}\_\_\_\_\_$$

$x \in \left[-\sqrt{61}, \ \sqrt{61}\right]$ болгондо берилген барабарсыздыктын эки жагында тең оң сандар жайгашкандыктан, аларды квадратка көтөргөндө барабарсыздык бузулбайт. Мындан

$\left(\sqrt{61 - x^2}\right)^2 \leq (5)^2 \Rightarrow \ \ 61 - x^2 \leq (5)^2 \ \ \Rightarrow x^2 \geq 61 - 25 \quad \Rightarrow$

$x^2 \geq 36 \Leftrightarrow \ \ |x| \geq 6 \quad \Leftrightarrow x \leq -6$ же $x \geq 6$

б.а. $x \in (-\infty, -6] \cup [6, \ +\infty)$ аралыктарынын биригүүсүбарабарсыздыктын чыгарылышы болорун көрөбүз.

Табылган чыгарылыш аралыгын ЧЖА га кирген бөлүгү, алардын кесилиш аралыктары болот

$X = \{(-\infty, -6] \cup [6,\ +\infty)\} \cap \left[-\sqrt{61},\ \sqrt{61}\right] = \left[-\sqrt{61},\ -6\right] \cup \left[6,\ \sqrt{61}\right]$.

Туура жообу (г)$\left[-\sqrt{61},\ 6\right] \cup \left[6,\ \sqrt{61}\right]$.◄

11 – МИСАЛ . $\sqrt{x-2} + 4 \geq 0$ барабарсыздыгын чыгар.

Жооптор : (а)$x -$ каалагандай сан; (б)$[2, +\infty)$; (в)$(2, +\infty)$;

(г)$(18, +\infty)$; (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ : Оң сандан гана квадраттык тамыр алууга болгондуктан,

барабарсыздыктын ЧЖА сы $x - 2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq 2$ шартын канаттандырган x өзгөрүлмөлөрү болот $x \in [2, +\infty)$.

$x \in [2, +\infty)$ болгондо же ЧЖА нын аймагында барабарсыздыктагы эки кошулуучу тең оң болгондуктан $\left(\sqrt{x-2} \geq 0 \text{ жана } 4 \geq 0\right)$, ЧЖА га кирген бардык x өзгөрүлмөлөрү барабарсыздыкка чыгарылыш боло алат. Ошондуктан $x \in [2, +\infty) = X$ аралыгыгы чыгарылыш көптүгү болот. Туура жообу (б)$[2, +\infty)$. ◄

12 – МИСАЛ . $\sqrt{5x-4} < x$ барабарсыздыгын чыгар.

Жооптор : (а) $\left[\frac{4}{5},\ 1\right) \cup (4, +\infty)$; (б) $\left(\frac{4}{5}, 1\right) \cup (4, +\infty)$; (в)$(1,\ 4)$;

(г)$[1,\ 4]$; (д)чыгырылышы жок.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздык жашашы үчүн: 1) Сол жагында турган квадраттык тамыр алдындагы туюнтма оң сан $5x - 4 \geq 0$

2) Барабарсыздык туура болушу үчүн сол жагындагы оң сан, оң сандан гана кичине болушу мүмкүн, ошондуктан оң жагындагы $x \geq 0$ болушу керек .

Демек, бир эле учурда $x \geq \frac{4}{5}$ жана $x \geq 0$ болгондо гана барабарсыздыктын чыгарылышын издөөгө болот, анда алардын кесилиши же экөөсү тең аткарылган абал $\left\{x \geq \frac{4}{5}\right\} \cap \{x \geq 0\} = x \geq \frac{4}{5}$ же $\left[\frac{4}{5}, +\infty\right)$ аралыгы, барабарсыздыкка ЧЖА болот.

ЧЖА нын аймагындагы x тер үчүн барабарсыздыктын эки жагын тең квадратка көтөрсөк, барабарсыздык бузулбайт. Бул учурда берилген барабарсыздык

$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 < x^2 \quad \Rightarrow \quad 5x - 4 < x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 4 > 0$ көрүнүшүнө өзгөрөт.

Аны чыгаруу үчүн $y = x^2 - 5x + 4$ функциясынын нөлдөрүн табабыз

$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$, $x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$, $x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$. Функцияда $a = 1 > 0$ болгондуктан параболанын бутактары жогору карап, $0x$ огун $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ чекиттеринде кесип өтүп, функция алардын арасындагы аралыкта терс, ал эми сыртында оң маанилерди кабыл алат. $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ чекиттери нөлдөн чоң болуу аралыгына кирбейт (бул чекиттерде нөлгө тең)

$$\underline{\qquad\quad}0\underbrace{\frac{4}{5}\overbrace{\underline{\qquad\quad}}^{\text{чыгарылыш}}1\underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad}}_{\text{функц.терс}}4\overbrace{\underline{\qquad\qquad\quad}}^{\text{чыгарылыш}}}_{\text{ЧЖА}}+\infty.$$

Демек, ЧЖА менен $y = x^2 - 5x + 4$ функциясынын нөлдөн чоң маанилерди кабыл алган аралыктардын кесилиши

$\left[\frac{4}{5}, +\infty\right) \cap \{(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)\} = \left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup (4, +\infty)$, барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү болот. Туура жообу (а)$\left[\frac{4}{5}, 1\right) \cup (4, +\infty)$. ◄

13 – МИСАЛ . $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} > \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ барабарсыздыгын чыгар.

Жооптор : (а)$(1, 1)$; (б)$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; (в)$(-1, 2)$;

(г)$(-1, 2]$; (д)$(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздык $\begin{cases} 1)\ \ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0, \\ 2)\ \ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$ шарттары аткарылганда гана жашайт. Анткени, оң сандардан гана квадраттык тамыр алууга болот.

1) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ шарты аткарылган аралыкты издейли. Оболу анын же у $= 2x^2 - 3x + 1$ функциясынын нөлдөрүн табалы

$2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$, $x_1 = \frac{3+1}{4} = 1$, $x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$. Функцияда $a = 2 > 0$ болгондуктан параболанын (графиги) бутактары жогору карап, функция $x_2 = \frac{1}{2}$,

$x_1 = 1$чекиттеринин арасында терс, анын сыртында оң болот

$$\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\tfrac{1}{2}}^{\text{оң}}\underbrace{\_\_\_\_\_}_{\text{терс}}\overbrace{1\_\_\_\_\_\_\_\_\_2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{\text{оң}}.$$

Ошондуктан барабарсыздыктын сол жагы $X_1 = \left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right] \cup [1,\ +\infty)$ аралыгында жашайт.

2) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ шартынын аткарылуу аралыгын табалы. Ал үчүн у $= x^2 - 3x + 2$ функиясы оң маанилерди кабыл ала тургандай x тердин көптүгүн издейбиз. Функциянын

$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$, $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$, $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$ нөлдөрүн аныктап, $a = 1 > 0$ болгондуктан функция $x_2 = 1$ менен $x_1 = 2$ сандарынын арасында терс, анын сыртында оң маанилерди кабыл аларын көрөбүз

$$-\infty\ \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\tfrac{1}{2}\_\_\_}^{\text{оң}}1\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{терс}}2\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{\text{оң}} + \infty .$$

Демек, барабарсыздыктын оң жагы $X_2 = (-\infty,\ 1] \cup [2, +\infty)$ аралыктарында жашайт. Барабарсыздыктын сол жана оң жактарынын экөөсү тең

ЧЖА $= X_1 \cap X_2$

$$= \left\{\left(-\infty, \quad \frac{1}{2}\right] \cup [1, \quad +\infty)\right\} \cap \{(-\infty, \quad 1] \cup [2, +\infty)\} =$$

$= \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$ аралыктарында жашайт

$$-\infty \underbrace{\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\tfrac{1}{2}}_{\text{ЧЖА}}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\underbrace{2\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{ЧЖА}} + \infty .$$

x өзгөрүлмөсү ЧЖА га таандык деп эсептеп, барабарсыздыктын эки жагын тең бир учурда квадратка көтөргөндө барабарсыздык бузулбагандыктан,

$$\left(\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\right)^2 > \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$2x^2 - 3x + 1 > x^2 - 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad |x| > 1 \quad \Leftrightarrow$

$x < -1$ же $x > 1$, б.а. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) =$ ЧА – чыгарылыш аралыгын табабыз.

Табылган ЧА – чыгарылыш аралыгынын ЧЖА га кирген бөлүгү, алардын кесилиши катарында

$$\text{ЧА} \cap \text{ЧЖА} = \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \cap \left\{\left(-\infty, \quad \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)\right\} =$$

$= (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$ аралыгы болот.

Берилген барабарсыздыктын чоң жагы (сол тарабы) нөлгө айланган чекиттерде, “> – кескин чоң ” шарты аткарылбай калуу коркунучу болгондуктан $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ чекиттеринде барабарсыздыкты кошумча текшерип коюу керек, бирок биздин учурда андай зарылчылык жок, анткени айтылган нөлдөр ЧА га кирбейт. Ошондуктан туура жообу ЧА ∩ ЧЖА $= (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$ же (д). ◄

14 – МИСАЛ . $(2x - 3)\sqrt{3x^2 - 5x - 2} > 0$ барабарсыздыгын чыгар.

Жооптор : (а) $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$; (б) $[2, +\infty)$; (в) $(2, +\infty)$;

(г) $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$; (д) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздык жашашы үчүн квадраттык тамыр алдында турган туюнтма $3x^2 - 5x - 2 \geq 0$ болушу керек. Бул туюнтма у $= 3x^2 - 5x - 2$ функциясы оң маанилерди кабыл алган x чекиттеринде гана оң болуп, графиги $0x$ огунун жогорку тарабында жайгашат. Оболу функциянын нөлдөрүн табалы

$3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3} = \frac{5 \pm\sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$, $x_1 = \frac{5+7}{6} = 2$, $x_2 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3}$. Функцияда $a = 3 > 0$ болгондуктан, анын графиги болгон параболанын бутактары жогору карап $x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{3}$ чекиттеринин арасында параболанын графиги $0x$ огунун төмөн жагында жайгашып функция терс, ал эми аталган аралыктын сыртында графиги $0x$ огунун жогору жагында жайгашып оң маанилерди кабыл аларын көрөбүз

$$-\infty\ \overbrace{\rule{6cm}{0.4pt}}^{\text{оң}}\ -\frac{1}{3}\ \underbrace{\_\,0\rule{2cm}{0.4pt}}_{\text{терс}}\ \overbrace{2\rule{6cm}{0.4pt}}^{\text{оң}}\ +\infty\,.$$

Демек, функциянын ЧЖА сы

ЧЖА $= \left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right] \cup [2, +\infty)$ аралыктары болот.

Берилген барабарсыздык эки сандын көбөйтүндүсүнөн тургандыктан, анын нөлдөн чоң болушу үчүн эки көбөйтүүчүнүн бир учурда нөлдөн чоң же нөлдөн кичине болушу жетиштүү.

1 – көбөйтүүчү $2x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 3 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{3}{2}$ же $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ аралыгында нөлдөн чоң;

$2x - 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x < 3 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{3}{2}$ же $x \in \left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)$аралыгында нөлдөн кичине болот.

2 – көбөйтүүчү $\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ аралыктарында нөлдөн чоң (ЧЖА нын учку нөлүже " $-\frac{1}{3}$ "кирбейт);

$\left(-\frac{1}{3},\ 2\right)$ аралыгында нөлдөн кичине болот.

Эки көбөйтүүчү тең нөлдөн чоң болгон аралыктардын кесилиши $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \cap \left\{\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)\right\} = (2, +\infty)$ барабарсыздыктын чыгарылышынын бир бөлүгү болот.

Эки көбөйтүүчү тең нөлдөн кичине болгон аралыктардын кесилиши $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, 2\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ аралыгы болот.

Барабарсыздыктын чыгарылышы катарында эки көбөйтүүчү тең бир учурда нөлдөн чоң жана нөлдөн кичине болгон учурлардын бириГүүсүн алабыз $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

Туура жообу (г).◄

4. Теңдемелер системасын чыгаргыла

15 – МИСАЛ : $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x - y = 16 \end{cases}$

Жооптор:
(а)$(5;\ 3)$, (б)$(25;\ 9)$, (в)$(3;\ 5)$, (г)$(9;\ 25)$, (д)$(5;\ 9)$.

►ЧЫГАРУУ : Теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын жашоо аймагы (ЧЖА),$x \geq 0$ жана $y \geq 0$ шарттарына баш ийген $(x;\ y)$ координаталуу чекиттердин көптүгү болот. Анда системанын ЧЖА сы $0xy$ координаттык тегиздигинин биринчи чейреги болот ($0x$, $0y$ координаттык октору ЧЖА га кирет).

$\sqrt{x} = m$, $\sqrt{y} = n$ белгилөөлөрүн киргизсек, m менен n өзгөрүлмөлөрүнө оң өзгөрүлмөлөрдүн квадраттык тамырлары катарында оң болсун деген кошумча шарттар коюлат. Киргизилген белгилөөлөрдү пайдаланып, берилген системаны

$\begin{cases} m + n = 8, \\ m^2 - n^2 = 16 \end{cases}$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп,

$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ формуласын пайдаланып

$$\begin{cases} m + n = 8, \\ (m + n)(m - n) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 8, \\ (m + n)(m - n) = 16 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} m+n=8, \\ 8(m-n)=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+n=8, \\ m-n=2 \end{cases}$ теңдемелер системасына келтиребиз.

Акыркы теңдемелер системасындагы жолчолорду мүчөлөп кошуп

$2m=10 \Rightarrow m=5$; Биринчисинен экинчисин мүчөлөп кемитип, $2n=6 \Rightarrow n=3$ жоопторуна ээ болобуз. Экөөсү тең оң сандар болуп, кошумча шартка баш ийишет.

Киргизилген белгилөөлөргө кайрылып,

$\begin{matrix} \sqrt{x}=m, \\ \sqrt{y}=n \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{x}=5, \\ \sqrt{y}=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=25, \\ y=9 \end{matrix}$ түгөй чечимдерин табабыз.

Туура жообу (б)$(25;\ 9)$. ◄

16 – МИСАЛ : $\begin{cases} \sqrt{x+3y+6}=2, \\ \sqrt{2x-y+2}=1 \end{cases}$

Жооптор:

(а) $\left(\frac{5}{7};\ \frac{3}{7}\right)$, (б) $\left(\frac{3}{7};\ \frac{5}{7}\right)$, (в) $\left(-\frac{3}{7};\ \frac{5}{7}\right)$, (г) $\left(-\frac{5}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$,

(д) $\left(-\frac{3}{7};\ -\frac{5}{7}\right)$.

►ЧЫГАРУУ : Теңдемелер системасынын жашашы үчүн $\begin{cases} x+3y+6 \geq 0, \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$ шарттары аткарылышы зарыл, анткени оң сандан гана квадраттык тамыр алууга болот. Бул шарт

$\begin{cases} x+3y+6 \geq 0, \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{1}{3}x-2, \\ y \leq 2x+2 \end{cases}$ барабарсыздыктары

аткарылган$(x;\ y)$чекиттери, б.а. Oxy координаттык тегиздигиндеги $y=-\frac{1}{3}x-2$ түзүнүн жогору, ал эми $y=2x+2$ түзүнүн төмөн жагында жайгашкан, $(x;\ y)$ координаталуу чекиттер болушат:

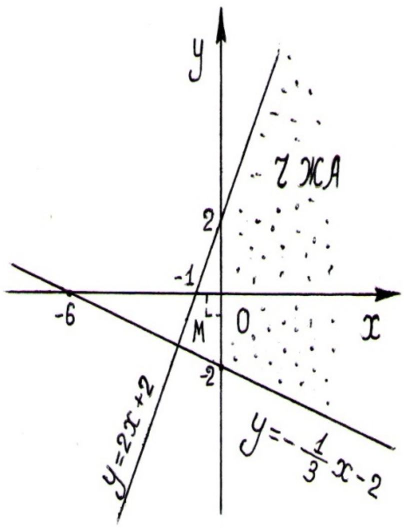
ЧЖА $=\left\{(x;\ y) \middle| -\frac{1}{3}x-2 \leq y \leq 2x+2\right\}$ (1.14– чийме).

Ситеманын эки жолчосун тең мүчөлөп квадратка көтөрүп,

$$\begin{cases}\left(\sqrt{x+3y+6}\right)^2=2^2,\\ \left(\sqrt{2x-y+2}\right)^2=1^2\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}x+3y+6=4,\\ 2x-y+2=1\end{cases}\Rightarrow\ \begin{cases}x+3y=-2\,,\\ 2x-y+=-1\end{cases}$$

көрүнүшүндөгү системага теңдеш өзгөртүп түзөбүз.

Экинчи жолчону 3 кө көбйтүп, биринчи жолчого мүчөлөп кошсок,



1.14-чийме

$7x=-5\ \Rightarrow\ x=-\frac{5}{7}$ келип чыгат.

Биринчи жолчону “ – 2” ге көбөйтүп, экинчисине кошсок,

$-7y=3\ \Rightarrow\ y=-\frac{3}{7}$ болорун көрөбүз.

Эгерде $M\left(-\frac{5}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$ чекити ЧЖА га кирсе, анда ушул чекит теңдемелер системасынын чыгарылышы болот. Чынында эле бул чекиттин “$-\frac{5}{7}$” абсциссасы “ – 1” ден чоң , ал эми “$-\frac{3}{7}$” ординатасы “-2” ден чоң болуп, ЧЖА нын аймагында жайгашкан, анда туура жообу $M\left(-\frac{5}{7};\ -\frac{3}{7}\right)$ чекити же (г) .

◄

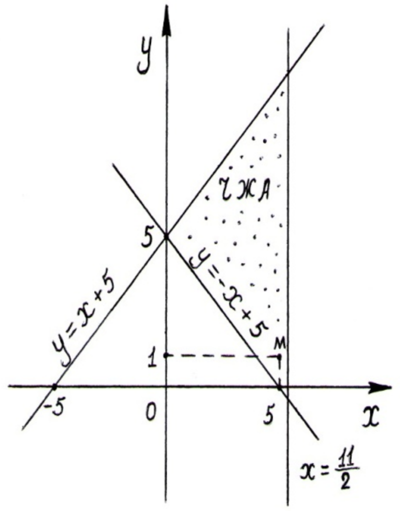
17 – МИСАЛ : $\begin{cases}\sqrt{x-y+5}=3,\\ \sqrt{x+y-5}=-2x+11\end{cases}$

Жооптор:

(а)$(5;\ 1)$, (б)$(1;\ 5)$, (в)$(6;\ 2)$, (г)$(2;\ 6)$, (д)$(-1;\ -5)$.

►ЧЫГАРУУ : Теңдемелер системасынын жашашы үчүн үч шарт аткарылышы керек:

$$\begin{cases}x-y+5\geq 0\ (\text{тамыр алдындагы туюнтма катары}),\\ x+y-5\geq 0\ (\text{тамыр алдындагы туюнтма катары}),\\ -2x+11\geq 0\ (\text{тамырдын мааниси катары}).\end{cases}$$



1.15-чийме

Мындан $0xy$ координаттык тегиздигинин $\begin{cases} y \le x+5, \\ y \ge -x+5, \\ x \le \frac{11}{2} \end{cases}$ шартына баш ийген бөлүгү системанын ЧЖА сы болорун көрөбүз (1.15 – чийме).

ЧЖА нын аймагында системанын эки жолчосунда тең оң сандар тургандыктан, аларды квадратка көтөрүүдөн теңдемени түзгөн теңдештик бузулбайт. Ошондуктан системаны

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x-y+5}\right)^2 = 3^2, \\ \left(\sqrt{x+y-5}\right)^2 = (-2x+11)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y+5 = 9, \\ x+y-5 = (-2x)^2 + 2\cdot(-2x)\cdot 11 + 121 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y = 4, \\ x+y = 4x^2 - 44x + 126 \end{cases}$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртө алабыз.

Эки жолчону мүчөлөп кошуп $2x = 4 + 4x^2 - 44x + 126$ же $4x^2 - 46x + 130 = 0$ же 2 ге бөлүп жиберип $2x^2 - 23x + 65 = 0$ квадраттык теңдемесине ээ болуп, анын

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-23) \pm \sqrt{(-23)^2 - 4\cdot 2\cdot 65}}{2\cdot 2}$$
$$= \frac{23 \pm \sqrt{529 - 520}}{4} =$$

$= \frac{23 \pm 3}{4}$, $x_1 = \frac{23+3}{4} = \frac{23}{4} = 5{,}75$ жана $x_2 = \frac{23-3}{4} = \frac{20}{4} = 5$ чечимдерин табабыз. Табылган чечимдердин бирөөсү $x_1 = 5{,}75 > 5{,}5 = \frac{11}{2}$ болгондуктан ЧЖА га кирбейт. Демек, $x_2 = 5$ болгондо, акыркы системанын биринчи жолчосунан чыгарылыш чекитинин $x - y = 4 \Rightarrow x_2 - y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = x_2 - 4 = 5 - 4 = 1$ ординатасы табылат. ЧЖА нын ордината коюлган шарттарын текшерсек,

$\begin{cases} y \le x + 5, \\ y \ge -x + 5 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} y_2 \le x_2 + 5\,, \\ y_2 \ge -x_2 + 5 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} 1 \le 5 + 5 = 10 \text{ (туура)}, \\ 1 \ge -5 + 5 = 0 \text{ (туура)}, \end{cases}$ анын ЧЖА нын шарттарына баш ийерин көрөбүз. Демек, туура жообу (а):$M(5;\ 1)$чекити же түгөйү. ◄

§1.4 Даражага көтөрүү. Көрсөткүчтүү теңдемелер жана барабарсыздыктар

1. Даражанын касиеттерин пайдаланып, туюнтмалардын маанилерин эсептегиле:

✓ Оболу даражанын негизги касиеттерин эске түшүрүп кетели:

1. Негиздери бирдей даражаларды көбөйтүү үчүн негизинин өзүн жазып, даражаларын кошуп коюу жетиштүү

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

2. Негиздери бирдей даражаларды бөлүү үчүн негизин өзүндөй калтырып, даражаларын кемитип коюу керек$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

Мындан сырткары$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^k = a^{\frac{m}{n} \cdot k}$; $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

$a^n = b \;\Leftrightarrow\; a = b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$касиеттери орун алат.

1– МИСАЛ : $9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}.$

Жооптор: (а)$36\frac{1}{8}$; (б) $35\frac{7}{8}$; (в) 24; (г) $18\frac{7}{8}$; (д) 4 4.

► ЭСЕПТӨӨ : $9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{\frac{3}{4}} =$

$3^3 + 3^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 36 - \frac{1}{8} = 35 + 1 - \frac{1}{8} = 35 + \frac{7}{8} = 35\frac{7}{8}$.

Туура жообу $35\frac{7}{8}$ же (б).◄

2– МИСАЛ : $6^{\frac{1}{3}} \cdot 18^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}}$

Жооптор: (а)$6\sqrt[3]{6}$; (б)$\sqrt[3]{6}$; (в) $18\sqrt[6]{2}$; (г) 18; (д) 6.

► ЭСЕПТӨӨ : $6^{\frac{1}{3}} \cdot 18^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} \cdot (2 \cdot 3^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{6}} =$

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{2 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 2^{2 \cdot \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} =$$

$= 2^{\frac{3}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} = 2^1 \cdot 3^1 = 2 \cdot 3 = 6$. Демек, туура жообу 6 же (д). ◄

3– МИСАЛ : $\left(27^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$

Жооптор: (а)1; (б)$\frac{1}{3}$; (в) 3; (г) 9; (д)$\frac{1}{9}$.

► ЭСЕПТӨӨ : $\left(27^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left[(3^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (3^{-2})^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{4}{3}} = \left[3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{-6}{4}}\right]^{\frac{4}{3}} =$

$= \left[3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{-3}{2}}\right]^{\frac{4}{3}} = \left[3^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\right]^{\frac{4}{3}} = (3^0)^{\frac{4}{3}} = (1)^{\frac{4}{3}} = 1$. Туура жообу (а) . ◄

2. Даражалардын касиеттерин пайдаланып, туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

4 – МИСАЛ : $a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{7}{12}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{7}{12}-\frac{2}{3}} = a^{\frac{10-9}{12}} \cdot b^{\frac{7-8}{12}} =$

$= a^{\frac{1}{12}} \cdot b^{\frac{-1}{12}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\frac{a}{b}}$.

Демек, болжолдуу : (а)$a^{\frac{5}{8}} \cdot b^{\frac{7}{9}}$; (б)1 ; (в) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{12}}$; (г)$(ab)^{\frac{1}{12}}$; (д) a жоопторунун ичинен, туура жооп (в) болот. ◄

5– МИСАЛ : $\dfrac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{9}{5}} + 2a^{-\frac{1}{5}}}$.

Жооптор: (а) $\frac{9a}{a+2}$; (б) $\frac{9}{a^{\frac{2}{5}}+2a}$; (в) $\frac{9a^{\frac{1}{5}}}{a^2+2}$; (г) $\frac{9a}{a^2+2}$; (д) $\frac{9a^2}{a+2}$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ: $\frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{9}{5}}+2a^{-\frac{1}{5}}} = \frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{9}{5}}+\frac{2}{a^{\frac{1}{5}}}} = \frac{9a^{\frac{4}{5}}}{\frac{a^{\frac{9}{5}}a^{\frac{1}{5}}+2}{a^{\frac{1}{5}}}} = \frac{9a^{\frac{4}{5}}a^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{9}{5}}a^{\frac{1}{5}}+2} =$

$= \frac{9a^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}}{a^{\frac{9}{5}+\frac{1}{5}}+2} = \frac{9a}{a^2+2}$ келип чыгат. Туура жообу (г).◄

6– МИСАЛ : $\frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}}$.

Жооптор: (а) $b+c$; (б) $\frac{1}{bc}$; (в) $\frac{b+c}{bc}$; (г) 1; (д) $b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ: $\frac{b^{\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\cdot c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{5}{4}}} = \frac{b^{\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{5}{4}}} + \frac{b^{\frac{1}{4}}\cdot c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{5}{4}}} = b^{\frac{5}{4}-\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{1}{4}-\frac{5}{4}} +$

$+ b^{\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{5}{4}-\frac{5}{4}} = b^0\cdot c^{-1} + b^{-1}\cdot c^0 = 1\cdot\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\cdot 1 = \frac{1}{c}+\frac{1}{b} = \frac{b+c}{bc}$ ээ болобуз.

Туура жообу (в). ◄

3. Теңдемелерди чыгаргыла.

7 – МИСАЛ : $49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.

Жооптор: (а) $-\frac{2}{3}$; (б) -2; (в) $\frac{1}{2}$; (г) $\frac{3}{2}$; (д) $-\frac{3}{2}$.

► ЧЫГАРУУ : Санды каалагандай даражага көтөрүүгө болгондуктан, белгисиз x өзгөрүлмөсүнө чектөө коюлбайт, б.а. ЧЖА $= R = (-\infty, +\infty)$ аралыгы болот.

$49^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad 7^{2(x+1)} = 7^{-x}$ даражалардын негиздери бирдей, анда теңдештиктин аткарылышы үчүн даража көрсөткүчтөрү тең болушу керек. Мындан

$$7^{2(x+1)} = 7^{-x} \;\Rightarrow\; 2(x+1) = -x \;\Rightarrow\; 2x+2 = -x \;\Rightarrow$$

$3x = -2 \;\Rightarrow\; x = -\frac{2}{3}$ чечими табылат.

Табылган чечимди теңдемеге коюп, теңдештиктин орун алышын текшерип көрүүгө болот. Ал үчүн сол жагына x тин ордуна “$-\frac{2}{3}$ “ маанисин коюп,

$49^{x+1} \Rightarrow\ 49^{-\frac{2}{3}+1} = 49^{\frac{-2+3}{3}} = 49^{\frac{1}{3}} = 7^{2\cdot\frac{1}{3}} = 7^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$ эсептесек, оң жагынын келип чыкканын көрөбүз. Демек, туура жообу “$-\frac{2}{3}$ “ же (а).◄

8 – МИСАЛ : $128 \cdot 16^{2x+1} = 8^{3-2x}$.

Жооптор . (а) $-\frac{1}{7}$; (б) $\frac{1}{12}$; (в) -7; (г) $-\frac{1}{12}$; (д)12 .

► ЧЫГАРУУ : Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй чыныгы сандар же сан огу болот, анткени сандарды чектүү даражага көтөрүүгө чектөө жок.

$$128 \cdot 16^{2x+1} = 8^{3-2x} \quad \Rightarrow \quad 2^7 \cdot 2^{3(2x+1)} = 2^{3(3-2x)} \quad \Rightarrow$$

$2^{7+\,3(2x+1)} = 2^{3(3-2x)}$ даражалардын негиздери бирдей, анда теңдештиктин аткарылышы үчүн даража көрсөткүчтөрү тең болушу керек$7 + \ 3(2x+1) = 3(3-2x)$. Мындан

$7 + \ 3(2x+1) = 3(3-2x) \Rightarrow 7 + 6x + 3 = 9 - 6x \Rightarrow$

$12x \ = -10 + 9 \ \Rightarrow\ 12x = -1 \ \Rightarrow\ x = -\frac{1}{12}$ чечимин табабыз.

Табылган чечимдин теңдемени канааттандырарын текшерели. $x = -\frac{1}{12}$ маанисин теңдеменин сол жагына койсок, анда

$$128 \cdot 16^{2x+1} \ \Rightarrow\ 128 \cdot 16^{2\left(-\frac{1}{12}\right)+1} = 128 \cdot 16^{-\frac{1}{6}+1} = 128 \cdot 16^{\frac{5}{6}} =$$

$$= 2^7 \cdot 2^{3\left(\frac{5}{6}\right)} = 2^{7+3\left(\frac{5}{6}\right)} = 2^{7+\frac{5}{2}} = 2^{\frac{19}{2}};$$

Оң жагына койсок $8^{3-2x} \ \Rightarrow\ 8^{3-2\left(-\frac{1}{12}\right)} = 8^{3+\frac{1}{6}} = 2^{3\left(3+\frac{1}{6}\right)} = 2^{9+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{19}{2}}$, ошол эле маани келип чыгып, чындыгында эле $x = -\frac{1}{12}$ чечим болору текшерилет.

Туура жообу $x = -\frac{1}{12}$ же (г). ◄

9 – МИСАЛ : $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36$.

Жооптор . (а) $\frac{1}{2}$; (б)2; (в) ± 2; (г)3; (д) $\frac{1}{3}$.

► ЧЫГАРУУ : Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот, анткени сандарды каалаганчалык чектүү даражага көтөрүүгө болот.

Бул учурда берилген көрсөткүчтүү теңдеменин

$3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 36 \quad ⇨ \quad 3^x \cdot 3^2 - 5 \cdot 3^x = 36 \quad ⇨ \quad 9 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^x =$

$= 36 \quad ⇨ \quad 4 \cdot 3^x = 36 \quad ⇨ \quad 3^x = 9 \quad ⇨ \quad 3^x = 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$
көрүнүшүндөгү чечимин табабыз.

Анын чечим экендигин теңдемеге коюп текшерип көрөлү:

Сол жагына койсок,$3^{x+2} - 5 \cdot 3^x \quad ⇨ \quad 3^{2+2} - 5 \cdot 3^2 = 3^4 - 5 \cdot 3^2 =$

$= 3^2(3^2 - 5) = 9 \cdot 4 = 36$ оң жагы келип чыгып, теңдештик аткарылды. Анда туура чечим $x = 2$ же (б).◄

10 – МИСАЛ : $\frac{2^{x^2+2}}{6^2} = \frac{6^2}{3^{x^2+2}}$.

Жооптор . (а) $\pm\sqrt{6}$; (б) $\pm\sqrt{2}$; (в) ± 2; (г)2; (д) -2.

► ЧЫГАРУУ : Көрсөткүчтүү теңдемеде бөлчөк катышканы менен, анын бөлүмүндөгү 3^{x^2+2} туюнтмасы x тин бардык маанилеринде нөлдөн чоң болгондуктан, теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

Теңдеменин эки жагын тең нөлдөн чоң болгон $6^2 \cdot 3^{x^2+2}$ өзгөрүлмө санына көбөйтүп,

$2^{x^2+2} \cdot 3^{x^2+2} = 6^2 \cdot 6^2 ⇨ (2 \cdot 3)^{x^2+2} = 6^{2+2} \quad ⇨ \quad 6^{x^2+2} = 6^4$
көрсөткүчтүү теңдемесине ээ болобуз. Даражалардын негиздери бирдей, анда теңдештиктин аткарылышы үчүн даража көрсөткүчтөрү тең болушу керек болгондуктан, көрсөткүчтүү теңдеме

$x^2 + 2 = 4$ көрүнүшүндөгү теңдемеге теңдеш өзгөртүлөт. Мындан

$x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$ чечимдерин табабыз. Алардын чечимдер болорун текшерип көрөлү:

Сол жагы $\frac{2^{x^2+2}}{6^2} \quad ⇨ \quad \frac{2^{(\pm\sqrt{2})^2+2}}{6^2} = \frac{2^{2+2}}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{2^2 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$;

Оң жагы $\frac{6^2}{3^{x^2+2}} \Rightarrow \frac{6^2}{3^{(\pm\sqrt{2})^2+2}} = \frac{6^2}{3^{2+2}} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{3^4} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$. Демек, теңдемени канааттандыргандыктан туура чечим $x = \pm\sqrt{2}$ же (б) болот. ◄

11 – МИСАЛ : $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

Жооптор . (а)0; (б)2; (в) $\pm\sqrt{2}$; (г) ± 1; (д) $\pm\sqrt{3}$.

► ЧЫГАРУУ : Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот. Теңдеменин эки жагын тең нөлдөн айырмалуу 3^{x^2} санына бөлүп жиберсек, берилген теңдеме

$$\frac{2^{x^2-1}}{3^{x^2}} - \frac{3^{x^2}}{3^{x^2}} = \frac{3^{x^2-1}}{3^{x^2}} - \frac{2^{x^2+2}}{3^{x^2}} \Rightarrow \frac{2^{x^2} \cdot 2^{-1}}{3^{x^2}} - \frac{3^{x^2}}{3^{x^2}} =$$

$$= \frac{3^{x^2} \cdot 3^{-1}}{3^{x^2}} - \frac{2^{x^2} \cdot 2^2}{3^{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} - 1 = 3^{-1} - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + 4\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{9} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \frac{8}{27} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөрүп, негиздери тең болгондуктан, даражаларын теңдештиргенден кийин$x^2 = 3$ абалына келет.

Мындан эки $x = \pm\sqrt{3}$ чечимдерине ээ болобуз. Алардын чечим болорун теңдемеге коюп текшеребиз:

Сол жагы $2^{x^2-1} - 3^{x^2} \Rightarrow 2^{(\pm\sqrt{3})^2-1} - 3^{(\pm\sqrt{3})^2} = 2^{3-1} - 3^3 =$

$$= 4 - 27 = -23;$$

Оң жагы $3^{x^2-1} - 2^{x^2+2} \Rightarrow 3^{(\pm\sqrt{3})^2-1} - 2^{(\pm\sqrt{3})^2+2} = 3^{3-1} - 2^{3+2} =$

$= 9 - 32 = -23$ болуп, теңдемени түзгөн теңдештик аткарылат. Анда туура жообу $\pm\sqrt{3}$ же (д). ◄

12 – МИСАЛ : $9^x - 3^{x+1} = 54$.

Жооптор . (а)$9, -6$; (б)2; (в)$2, -6$; (г) -6; (д) $2, \log_3 6$.

► ЧЫГАРУУ : Теңдеменин чыгарылыштарынын жашоо аймагы (ЧЖА) бүтүндөй сан огу болот.

$3^x = t$ деген белгилөө киргизсек, анда $3^x > 0$ болгондуктан, ага тең болгон t да $t > 0$ болушу керек. Киргизилген белгилөөнү пайдаланып,

$9^x - 3^{x+1} = 54 \Rightarrow (3^x)^2 - 3^x \cdot 3^1 = 54 \Rightarrow t^2 - 3\,t - 54 = 0$ квадраттык теңдемесине ээ болобуз. Анын чечимдерин табалы

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54)}}{2}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 216}}{2} =$$

$= \frac{3 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{3 \pm 15}{2}$, $t_1 = \frac{3+15}{2} = \frac{18}{2} = 9$ жана $t_2 = \frac{3-15}{2} = \frac{-12}{2} = -6$. Табылган чечимдердин бирөөсү $t_1 = 9$ гана нөлдөн чоң, ошондуктан берилген теңдеме

$3^x = t \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$ чечимине ээ болот.

Текшерүү: $9^x - 3^{x+1} \Rightarrow 9^2 - 3^{2+1} = 9^2 - 3^3 = 81 - 27 = 54 \Rightarrow$ туура. Туура жообу (б) 2 .◄

13 – МИСАЛ : $2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$.

Жооптор . (а) -4 , 2 ; (б) -2, 4; (в) 2; (г) -2; (д) 1 .

► ЧЫГАРУУ : Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот, анткени сандарды даражага көтөрүүгө чек коюлбайт.

$2^x = y$ деген белгилөө киргизсек, анда y ке нөлдөн чоң $(y > 0)$ деген шарт коюлат, анткени нөлдөн чоң болгон 2^x ке нөлдөн чоң гана сан тең болушу мүмкүн. Белилөөнү пайдаланып, берилген теңдемени

$$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1 \Rightarrow 2^2 \cdot 2^{-x} - 2^x \cdot 2^{-1} = 1 \Rightarrow \frac{2^2}{2^x} - \frac{2^x}{2} = 1$$

$\Rightarrow \frac{4}{y} - \frac{y}{2} = 1$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп түзөбүз. Акыркы теңдеменин эки жагын тең нөлдөн айырмалуу болгон $2y$ санына көбөйтүп жиберсек , $2y \cdot \left(\frac{4}{y} - \frac{y}{2}\right) = 2y \cdot 1 \Rightarrow 8 - y^2 = 2y \Rightarrow$

$y^2 + 2y - 8 = 0$ квадраттык теңдемеси келип чыгып, $b = 2$ жуп болгондогу формула боюнча

$$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - (-8)} = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$$

$y_1 = -1 + 3 = 2$ жана $y_2 = -1 - 3 = -4$ чечимдери табылат. $y > 0$ болгондуктан, табылган чечимдердин $y_1 = 2$ нөлдөн чоңун алабыз. Анда берилген көрсөткүчтүү теңдеме

$2^x = y \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$чечимине ээ болот.

ТЕКШЕРҮҮ :

$2^{2-x} - 2^{x-1} \Rightarrow 2^{2-1} - 2^{1-1} = 2^1 - 2^0 = 2 - 1 = 1$ туура.

Туура жообу $x = 1$ же (д).◄

14 – МИСАЛ : $64^x + 2^{2+3x} - 12 = 0$.

Жооптор . (а) 3 ; (б) 2; (в) $\frac{1}{3}$; (г) -6, 2; (д) -2 .

► ЧЫГАРУУ : Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот. Теңдемени түзгөн теңдештикти бузбай турган өзгөртүүлөрдү жүргүзүп,

$$64^x + 2^{2+3x} - 12 = 0 \Rightarrow (2^6)^x + 2^2 \cdot 2^{3x} - 12 = 0$$

$\Rightarrow 2^{6x} + 4 \cdot 2^{3x} - 12 = 0 \Rightarrow (2^{3x})^2 + 4 \cdot 2^{3x} - 12 = 0$

көрүнүшүнө келтиребиз. Мындан $2^{3x} = y$ белгилөөсүн ($y > 0$) киргизсек , $y^2 + 4y - 12 = 0$ квадраттык теңдемесине ээ болуп,

$b = 4$ жуп болгондогу формула боюнча

$y_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 - (-12)} = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4$, $y_1 = -2 + 4 = 2$ жана $y_2 = -2 - 4 = -6$ чечимдери табылат.$2^{3x} = y > 0$ болгондуктан, $y_1 = 2$ чечими гана коюлган шартка баш ийет. Анда берилген теңдеменин

$2^{3x} = 2 \Rightarrow 2^{3x} = 2^1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ чечими табылат.

ТЕКШЕРҮҮ:$64^x + 2^{2+3x} - 12 \Rightarrow 64^{\frac{1}{3}} + 2^{2+3\cdot\frac{1}{3}} - 12 =$

$= (2^6)^{\frac{1}{3}} + 2^3 - 12 = 2^2 + 2^3 - 12 = 4 + 8 - 12 = 0$ (туура). Анда туура жообу $x = \frac{1}{3}$ же (в). ◄

15 – МИСАЛ : $3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0$.

Жооптор . (а) $0, \ 1$; (б) -1; (в)0; (г) $\frac{5}{3}, \ 5$; (д) $-1, \ \frac{5}{3}$.

► ЧЫГАРУУ : Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот, анткени сандарды даражага көтөрүүгө чек коюлбайт.

Берилген теңдемеге теңдеш өзгөртүүлөрдү жүргүзөлү:

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot (5^2)^x - 8 \cdot (3 \cdot 5)^x +$$

$+5 \cdot (3^2)^x = 0 \quad \Rightarrow 3 \cdot 5^{2x} - 8 \cdot 3^x \cdot 5^x + 5 \cdot 3^{2x} = 0.$ Эки жагын тең нөлдөн айырмалуу, б.а. нөлдөн чоң 5^{2x} ке бөлүп жиберсек, анда теңдеменин чечимдери (нөлдөрү) жоголбойт. Ошондуктан аны

$$\frac{3 \cdot 5^{2x} - 8 \cdot 3^x \cdot 5^x + 5 \cdot 3^{2x}}{5^{2x}} = \frac{0}{5^{2x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{3 \cdot 5^{2x}}{5^{2x}} - \frac{8 \cdot 3^x \cdot 5^x}{5^{2x}} + \frac{5 \cdot 3^{2x}}{5^{2x}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$3 - \frac{8 \cdot 3^x}{5^{2x-x}} + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = 0 \Rightarrow 3 - 8\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5\left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = 0$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп түзүүгө болот. Мындан ары

$\left(\frac{3}{5}\right)^x = y$ белгилөөсүн киргизсек, анда y ке $y > 0$ болсун деген шарт коюлат, анткени ага тең болгон $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$.

Киргизилген белгилөөдөн кийин, берилген теңдеме

$5y^2 - 8y + 3 = 0$ көрүнүшүндөгү квадраттык теңдемеге айланат. Акыркы квадраттык теңдеменин $b = 2$ жуп болгондогу формула боюнча

$$y_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 15}}{5} = \frac{4 \pm 1}{5},$$

$y_1 = \frac{4+1}{5} = 1$ жана $y_2 = \frac{4-1}{5} = \frac{3}{5}$ чечимдери табылат. Табылган чечимдердин экөөсү тең нөлдөн чоң, ошондуктан белгилөөгө кайрылып, берилген теңдеменин эки чечимдерин табууга болот :

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = y_1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = y_2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$. Текшерүүнү өзүңөр жүргүзгүлө.

Туура жообу: 0, 1 сандары же (а). ◄

4. Теңдемелер системаларын чыгаргыла.

16 – МИСАЛ : $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \frac{4^{x-2,5}}{4^{3y}} = 2 \end{cases}$.

Жооптор . (а)$(-3;\ 0)$, (б)$(3;\ 0)$, (в)$(1;\ 1)$, (г)$\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, (д)$(-1;\ 2)$.

► ЧЫГАРУУ : Теңдемеде бөлчөк катышканы менен, анын бөлүмү y тин каалагандай маанисинде ар дайыма $4^{3y} \neq 0$ нөлдөн айырмалуу болуп, ЧЖА – бүтүндөй сан огу болот. Негиздери бирдей даражалардын касиеттерин пайдаланып, берилген теңдемени

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ \frac{4^{x-2,5}}{4^{3y}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 4^{x-2,5-(3y)} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 4^{x-3y-2,5} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2^{2(x-3y-2,5)} = 2^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2(x - 3y - 2,5) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - 6y - 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x - 6y = 6 \end{cases} \Rightarrow$ (экинчи жолчо $2 \neq 0$ санына бөлүндү) $\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3, \\ x - 3y = 3 \end{cases}$ көрүнүшүндөгү теңдемелер системасына теңдеш өзгөртүп түзө алабыз.

Акыркы теңдемелер системасынын биринчи жолчосунан экинчисин мүчөлөп кемитип, системага чечим болгон чекиттин ординатасын$5y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ табабыз.

Табылган маанини биринчи жолчого койсок, чечим болгон чекиттин абсциссасы $x + 2 \cdot 0 = 3 \Rightarrow x = 3$ табылат. Демек, теңдемелер системасынын чечими $(3\,;\ \ 0)$ координаталары менен берилген чекит же түгөй сандары болушат.

ТЕКШЕРҮҮ: $\begin{cases} x + 2y, \\ \frac{4^{x-2,5}}{4^{3y}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3 + 2 \cdot 0 = 3, \\ \frac{4^{3-2,5}}{4^{3\cdot 0}} = \frac{4^{0,5}}{4^{0}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{1} = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$(туура).

Туура жообу $(3\,;\ \ 0)$ же (б) . ◄

17 – МИСАЛ : $\begin{cases} 3^{x} \cdot 2^{y} = \frac{1}{9}, \\ y - x = 2 \end{cases}.$

Жооптор:(а)$(2;\ \ 0)$, (б)$(-2;\ \ 0)$, (в)$(1;\ \ 3)$, (г)$(-1;\ \ 1)$, (д)$(4;\ \ 2)$.

► ЧЫГАРУУ : Теңдемнин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот, анткени сандарды даражага көтөрүүгө чек коюлбайт.

Экинчисинен $y = x + 2$ ээ болуп, аны биринчисине койсок

$$3^{x} \cdot 2^{x+2} = \frac{1}{9} \ \Rightarrow 3^{x} \cdot 2^{x} \cdot 2^{2} = \frac{1}{9} \ \Rightarrow \ (3 \cdot 2)^{x} \cdot 4 = \frac{1}{9} \ \Rightarrow$$

$6^{x} = \frac{1}{36} \ \Rightarrow \ 6^{x} = 6^{-2} \ \Rightarrow \ x = -2$ табылып, системага чечим болуучу биринчи түгөй же чечим болгон чекиттин абсциссасын аныктайбыз. Мындан $y = x + 2 \ \Rightarrow$ экинчи $түгөй$ $y = -2 + 2 = 0$ табылат. Демек, системанын чечими $(-2;\ \ 0)$ координаталуу чекит же түгөй сандары болушат.

ТЕКШЕРҮҮ: $\begin{cases} 3^{x} \cdot 2^{y} \\ y - x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3^{-2} \cdot 2^{0} = \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{9}, \\ 0 - (-2) = +2 = 2 \end{cases}$(туура) .

Туура жообу (б). ◄

5. Көрсөткүчтүү барабарсыздыктарды чыгаргыла.

18 – МИСАЛ : $8^{2x+1} > 0{,}125$

Жооптор . (а)$(-1, +\infty)$; (б)$(-\infty, -1)$; (в)$(-1,\ 0)$;

(г)$(-1,\quad 0]$; (д)$(1, +\infty)$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздыктын ЧЖА сы бардык чыныгы сандар же бүтүндөй сан огу.

Барабарсыздык бузулбай турган өзгөртүүлөрдү жүргүзүп,

$$8^{2x+1} > 0{,}125 \quad \Rightarrow \quad 2^{3(2x+1)} > \frac{125}{1000} \quad \Rightarrow \quad 2^{6x+3} > \left(\frac{5}{10}\right)^3 \quad \Rightarrow$$

$2^{6x+3} > \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow\ 2^{6x+3} > 2^{-3}$ барбарсыздыгын алабыз. $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ көрсөткүчтүү функциясы $a > 1$ болгондо монотондуу өсүүчү, б.а. x чоңойсо a^x да кошо чоңоёт же даража көрсөткүчү чоңу чоң болот (§2.17 – кара). Бизде $a = 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{6x+3} > 2^{-3} \quad \Rightarrow \quad 6x + 3 > -3$

$\Rightarrow 6x > -6$. Мындан нөлдөн чоң болгон 6 санына бөлсөк, барабарсыздыктын белгиси өзгөрбөй $x > -1$ келип чыгып, барабарсыздыктын чыгарылыш аралыгы $x \in (-1, +\infty)$ интервалы болот. Туура жообу (а). ◄

19 – МИСАЛ : $2^{x+1} + \frac{1}{2} \cdot 2^x < 5$.

Жооптор . (а)$(-\infty,\ 2)$; (б)$(2, +\infty)$; (в)$(1,\ +\infty)$; (г)$(-\infty,\ 1)$;

(д)$(2,\ \ 1)$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздыктын ЧЖА сы бардык чыныгы сандар же бүтүндөй сан огу.

Барабарсыздык бузулбай турган өзгөртүүлөрдү жүргүзсөк, барабарсыздык

$$2^x \cdot 2^1 + \frac{1}{2} \cdot 2^x < 5 \quad \Rightarrow \quad 2^x\left(2 + \frac{1}{2}\right) < 5 \quad \Rightarrow \quad 2^x\left(2 + \frac{1}{2}\right) < 5 \quad \Rightarrow$$

$2^x \cdot \frac{5}{2} < 5 \Rightarrow 2^{x-1} \cdot 5 < 5$ нөлдөн чоң болгон 5 санына бөлгөндөн кийин, $2^{x-1} < 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{x-1} < 2^0$ көрүнүшүнө келет. $a = 2 > 1$ болгондуктан $y = 2^x$ монотондуу өсөт, б.а. даражасы чоңу чоң болот. Анда $x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$ келип чыгат. Демек, барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $X = (-\infty, \ 1)$ аралыгы болот. Туура жообу (г). ◄

20 – МИСАЛ : $3^{x^2} \leq 81$.

Жооптор:(а)$[-2, \ 2]$; (б)$(-\infty, -2]$; (в)$[2, \ +\infty)$;

(г)$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; (д)$[-2, \quad 0)$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздыктын ЧЖА сы бардык чыныгы сандар же бүтүндөй сан огу.

Барабарсыздыкты $3^{x^2} \leq 81 \quad \Rightarrow \quad 3^{x^2} \leq 3^4$ көрүнүшүндө жазып, салыштыруу жүргүзөлү: $a = 3 > 1$ болгондуктан $y = 3^x$ монотондуу өсөт, б.а. даражасы чоңу чоң болот. Анда $x^2 \leq 4$ – квадраты 4 төн кичине же барабар x өзгөрүлмөлөрү же

$|x| \leq 2 \Leftrightarrow [-2, \ 2]$ аралыгы барабарсыздыктын чыгарылышы болот

$\_\_\_\_\_\_\underbrace{-2\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_2}_{|x|\leq 2}\_\_\_\_\_\_$. Туура жообу (а). ◄

21 – МИСАЛ : $10^x - 8 \cdot 5^x \geq 0$.

Жооптор:(а)$[3, +\infty)$; (б)$(3, \ +\infty)$; (в)$(-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$; (г)$(0, +3]$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздыктын ЧЖА сы бардык чыныгы сандар же бүтүндөй сан огу.

Барабарсыздыкты бузулбай турган абалда өзгөртүп жазалы

$$10^x - 8 \cdot 5^x \geq 0 \ \Rightarrow \ (2 \cdot 5)^x - 2^3 \cdot 5^x \geq 0 \ \Rightarrow$$

$2^x \cdot 5^x - 2^3 \cdot 5^x \geq 0 \quad \Rightarrow 5^x \cdot (2^x - 2^3) \geq 0$. Эки сандын көбөйтүндүсү экөөсү тең бир учурда оң же терс болушкан учурда гана оң болору белгилүү.

1) $\begin{cases} 5^x > 0\,, \\ 2^x - 2^3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in (-\infty,\ \infty) \\ 2^x \geq 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in (-\infty,\ \infty), \\ x \geq 3 \text{ же } x \in [3,\ +\infty) \end{cases}$
болуп, алардын кесилишинде $X_1 = [3,\ +\infty)$ экөөсү тең аткарылат.

2) Экөөсү тең бир учурда терс болгон учур жашабайт, анткени 5^x көбөйтүүчүсү $\forall x \in (-\infty,\ \infty)$: $5^x > 0$ дайыма нөлдөн чоң сан болот.

Анда барабарсыздыктын чыгарылышы катарында эки көбөйтүүчү бир учурда оң болгон учурду алабыз.

Туура жообу $X_1 = [3,\ +\infty)$ же (а) .◄

22 – МИСАЛ : $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0$.

Жооптор . (а)$(0,\ 2)$; (б)$(-\infty,\ 0) \cup (2, +\infty)$;

(в)$(-\infty, -1) \cup (0,\ +\infty)$; (г)$(-1,\ +\infty)$; (д)$(-\infty,\ -1)$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздыктын ЧЖА сы бардык чыныгы сандар же бүтүндөй сан огу.

Барабарсыздык бузулбай тургандай өзгөртүүлөрдү жүргүзүп,

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} > 0 \Rightarrow$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 2\right] > 0$ көрүнүшүндөгү барабарсыздыкка ээ болобуз.

Көбөйтүүчүлөрдүн бири ар дайыма $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > 0$ нөлдөн чоң , анда эки сандын көбөйтүндүсү экөөсү тең нөлдөн чоң болгондо (же экөөсү тең нөлдөн кичине) гана нөлдөн чоң болгондуктан :

1 – көбөйтүүчү $\forall x \in (-\infty,\ \infty)$: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} > 0$;

2 – көбөйтүүчү $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 2 > 0 \Rightarrow 2^{-x} - 2^1 > 0 \Rightarrow 2^{-x} > 2^1 \Rightarrow a = 2 > 1$ болгондуктан $y = 2^x$ функциясы монотондууөсөт, б. а. даражасы чоңу чоң болот, б. а. $-x >$

1 же (-1) ге көбөйтүп, чыгарылыштардын $x < -1 \;\; \Leftrightarrow \;\; x \in (-\infty, -1)$ аралыгын табабыз.

Туура жообу $(-\infty, -1)$ же (д). ◄

23 – МИСАЛ : $3^x + 3^{2-x} > 10$.

Жooптор . (а)$(0,\ 2)$; (б)$(0,\ 1) \cup (9, +\infty)$; (в)$(-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$; (г)$(2,\ +\infty)$; (д)$(1,\ 9)$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздыктын ЧЖА сы бардык чыныгы сандар же бүтүндөй сан огу.

Барабарсыздыкта теңдеш өзгөртүүлөрдү жүргүзүп,

$$3^x + 3^{2-x} > 10 \;\; \Rightarrow \;\; 3^x + 3^2 \cdot 3^{-x} > 10 \;\; \Rightarrow \;\; 3^x + 3^2 \cdot \frac{1}{3^x} > 10$$

$\Rightarrow$ $3^x > 0$ санына көбөйтүп (барабарсыздыктын белгиси өзгөрбөйт), $3^{2x} + 3^2 > 10 \cdot 3^x \;\; \Rightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 > 0$ көрүнүшүнө келтиребиз. Мындан $3^x = у$ белгилөөсүн киргизсек $(у > 0)$, анда

$у^2 - 10 \cdot у + 9 > 0$ квадраттык барабарсыздыгына ээ болобуз.

Оболу квадраттык үч мүчөнүн нөлдөрүн табалы, анда $b = -10$ жуп болгондогу формула боюнча

$$у^2 - 10 \cdot у + 9 = 0 \;\; \Rightarrow у_{1,2} = -\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c} =$$

$$= -(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 9} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4 \;\; \Rightarrow у_1 = 5 + 4 = 9$$

жана $у_2 = 5 - 4 = 1$ нөлдөрү табылат.

$u = a \cdot у^2 + b \cdot у + c = у^2 - 10 \cdot у + 9$ функциясында $a = 1 > 0$ болгондуктан, пароболанын бутактары жогору карап, функция $у_1 = 9$ менен $у_2 = 1$ нөлдөрүнүн арасында терс, алардын сыртында нөлдөн чоң маанилерди кабыл алат

$$-\infty \overbrace{\rule{3cm}{0.4pt}\,0\,\_}^{у^2 - 10у + 9 > 0} \underbrace{1 \rule{4cm}{0.4pt} 9}_{у^2 - 10у + 9 \leq 0} \overbrace{\rule{3cm}{0.4pt}}^{у^2 - 10у + 9 > 0} + \infty \, .$$

Демек, берилген барабарсыздыктын чыгарылышы эки $\begin{cases} 3^x > y_1 \text{ же,} \\ 3^x < y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x > 9 \text{ же,} \\ 3^x < 1 \end{cases}$ көрсөткүчтүү барабарсыздыктардын чыгарылышы менен дал келет. Анда

1) $3^x > 9 \quad \Rightarrow \quad 3^x > 3^2 \quad \Rightarrow \quad x > 2$ же $x \in (2, +\infty)$; же

2)$3^x < 1 \quad \Rightarrow 3^x < 3^0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$ же $x \in (-\infty, \ 0)$ шарттарына баш ийген x тер барабарсыздыкка чыгарылыш боло алышат.

Туура жообу $(-\infty, \ 0) \cup (2, +\infty)$ же (в). ◄

24 – МИСАЛ : $4^{5+4x} - 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3+4x} + 8 \geq 0$.

Жооптор . (а) $\left(-\frac{5}{4}, \ 0\right) \cup \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$; (б) $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$;

(в) $\left[\frac{1}{4}\log_4 3 \ - 1, \quad +\infty\right)$; (г) $\left[\frac{1}{4}\log_4 3 \ + 1, \quad +\infty\right)$;

(д) $\left(-\infty, \ \frac{1}{4}\log_4 3\right]$.

► ЧЫГАРУУ : Барабарсыздыктын ЧЖА сы бардык чыныгы сандар же бүтүндөй сан огу.

Барабарсыздыкты теңдеш өзгөртүп түзөлү:

$$4^{5+4x} - 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3+4x} + 8 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4^2 \cdot 4^{3+4x} - 15 \cdot \frac{1}{4^{3+4x}} + 8 \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad 4^{3+4x} > 0$ санына көбөйтүп (барабарсыздык бузулбайт),

$4^2 \cdot (4^{3+4x})^2 - 15 + 8 \cdot 4^{3+4x} \geq 0$. Мындан $4^{3+4x} = y$ белгилөөсүн киргизип ($y > 0$),

$16 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 15 \geq 0$ квадраттык барабарсыздыгына ээ болобуз.

Оболу анын нөлдөрүн табалы, анда $b = 8$ жуп болгондогу формула боюнча

$$16 \cdot y^2 + 8 \cdot y - 15 = 0 \quad \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - a \cdot c}}{a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 16 \cdot 15}}{16} =$$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{16} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{16} = \frac{-4 \pm 16}{16} \Rightarrow y_1 = \frac{-4+16}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ жана $y_2 = \frac{-4-16}{16} = \frac{-20}{16} = \frac{-5}{4}$ нөлдөрү табылат.

$u = a \cdot y^2 + b \cdot y + c = 16y^2 + 8 \cdot y - 15$ функциясында $a = 16 > 0$ болгондуктан, параболанын бутактары жогору карап, функция

$y_2 = -\frac{5}{4}$ менен $y_1 = \frac{3}{4}$ нөлдөрүнүн арасында нөлдөн кичине же барабар, алардын сыртында нөлдөн чоң маанилерди кабыл алат

$$-\infty \overbrace{\rule{3cm}{0.4pt}}^{16y^2+8y-15>0} \underbrace{-\frac{5}{4} \rule{2cm}{0.4pt} 0 \rule{2cm}{0.4pt} \frac{3}{4}}_{16y^2+8y-15 \leq 0} \overbrace{\rule{3cm}{0.4pt}}^{16y^2+8y-15>0} + \infty .$$

Бирок,$u = a \cdot y^2 + b \cdot y + c$ функциясынын маанилери нөлдөн чоң болгону менен, белгилөөнүн негизинде анын $y -$ аргументине

$4^{3+4x} = y > 0$ шарты коюлганын эстеп, y деп $y_1 = \frac{3}{4}$ санын алабыз. Анда берилген барабарсыздык $4^{3+4x} \geq \frac{3}{4}$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүлөт.

$u = \log_a x \ (a > 0, \ a \neq 1)$ функциясы $a > 1$ болгондо монотондуу өсүүчү болуп, чоң x ке чоң u тиешелүү болот. Ошондуктан акыркы барабарсыздыкты 4 негизи боюнча логарифмдеп,

$\log_4 4^{3+4x} \geq \log_4 \frac{3}{4} \Rightarrow (3+4x) \cdot \log_4 4 \geq \log_4 3 - \log_4 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3+4x) \cdot 1 \geq \log_4 3 - 1 \quad \Rightarrow \quad 4x \geq \log_4 3 - 1 - 3 \quad \Rightarrow$

$4x \geq \log_4 3 - 4$ же 4 кө (оң сан) бөлүп жиберсек барабарсыздык бузулбай, $x \geq \frac{1}{4}\log_4 3 - 1$ көрүнүшүндөгү чыгарылыш

$\left[\frac{1}{4}\log_4 3 - 1, \ +\infty\right)$ аралыгы табылат.

Туура жообу (в) . ◀

§1.5 Логарифмдер. Логарифмалык теңдемелер жана барабарсыздыктар

✓ $a^x = b$ ($a > 0$ жана $a \neq 1$)көрсөткүчтүү теңдеменин чечимин $x = \log_a b$ деп белгилеп,аныb санын табуу үчүн a санын көтөрүүгө керек болгон x даража көрсөткүчү катарында түшүнүп, "a негизи боюнча b санын логарифми" деп окуйбуз.

$\mathbf{\log_a b = x} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a^x}$(Мында $\boldsymbol{a} > 0\,, a \neq 1$)

$\forall \boldsymbol{x} \in (-\infty, +\infty)$: $\boldsymbol{a^x} > 0$ **болгондуктан, ага тең болгон логарифм алдындагы** $\boldsymbol{b}$ **саны да, нөлдөн** $\boldsymbol{b} > 0$ **чоң болушу керек.**

Көрсөткүчтүү теңдеменин чечими катарындаx тин ордуна, анын $x = \log_a b$ маанисин койсок, теңдемени

$$a^{\log_a b} = b$$

канааттандырат. Мындан сырткары

$\log_a(b \cdot \text{c}) = \log_a b + \log_a \text{c}$; $\log_a \frac{b}{\text{c}} = \log_a b - \log_a \text{c}$;

$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$; $\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b$ сыяктуу касиеттери орун алып, алардын чындыгы даража көрсөткүчтөрдүн касиеттеринен келип чыгат. Мисалы, акыркынын сол жагын у деп белгилесек, анда $\log_{a^m} b = \text{у} \;\Leftrightarrow$ $(a^m)^{\text{у}} = b \Leftrightarrow (a^{\text{у}})^m = b \;\Leftrightarrow\; a^{\text{у}} = \sqrt[m]{b} \;\Leftrightarrow\; a^{\text{у}} = b^{\frac{1}{m}}$,

Оң жагы да ошол эле у ке $\text{у} = \log_a b^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\log_a b$ тең болот.

1. Туюнтмаларды эсептегиле.

1 – МИСАЛ : $8^{\frac{1}{3}\log_2 6} = (2^3)^{\frac{1}{3}\log_2 6} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}\log_2 6} = 2^{\log_2 6} =$

$= \left|\begin{matrix}\text{формула}\\ \text{боюнча}\end{matrix}\right| = 6$.

Туура жообу 6.◀

2 – МИСАЛ : $\log_{216} 27 + \log_{36} 16 + \log_6 3 =$

$$\begin{vmatrix}\text{бирдей негизге} \\ \text{келтирели}\end{vmatrix} = \log_{6^3} 27 + \log_{6^2} 16 + \log_6 3 =$$

$$= \frac{1}{3}\log_6 27 + \frac{1}{2}\log_6 16 + \log_6 3 = \log_6 \sqrt[3]{27} + \log_6 \sqrt{16} +$$

$+ \log_6 3 = \log_6\left(\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{16} \cdot 3\right) = \log_6(3 \cdot 4 \cdot 3) = \log_6 36 = 2$.

Туура жообу 2 . ◄

3 – МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{1}{25} : 9^{\log_3 2} = \log_{2^{-1}} 2^4 \cdot \log_5 5^{-2} : 3^{2\log_3 2} =$

$$= (-1) \cdot \log_2 2^4 \cdot (-2) \cdot \log_5 5 : 3^{\log_3 2^2} =$$

$= (-1) \cdot 4 \cdot (-2) \cdot 1 : 2^2 = 8 : 4 = 2$. Туура жообу 2. ◄

4 – МИСАЛ : $\left(\log_6 2 + \log_6 3 + 2^{\log_2 4}\right)^{\log_3 7} = (\log_6(2 \cdot 3) + 4)^{\log_3 7} =$

$= (1 + 4)^{\log_3 7} = 5^{\log_3 7}$. Туура жообу $5^{\log_3 7}$. ◄

2. Логарифмалык теңдемелерди чыгаргыла.

5 – МИСАЛ : $\log_2(2x - 1) = 3$.

Жооптор . (а)3,5 ; (б) 4,5 ; (в) $-3,5$; (г) $-4,5$; (д)3 .

► ЧЫГАРУУ. Логарифм жашашы үчүн, анын алдында турган туюнтма $2x - 1 > 0$ болушу керек. Демек, $2x - 1 > 0 \;\; ⇨ \;\; x > \frac{1}{2}$ же

$x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ аралыгы теңдеменин чыгарылыштарынын жашоо аймагы (ЧЖА сы) болот.

$$\log_2(2x - 1) = 3 \;\Leftrightarrow\; 2x - 1 = 2^3 \;⇨\; 2x = 1 + 8 \;⇨$$

$$2x = 9 \;⇨\; x = \frac{9}{2} = 4,5$$

чечимин табабыз.Табылган чечим ЧЖА га киргендиктен, туура чечим (б). ◄

6– МИСАЛ : $\log_2 3 - \log_2(2 - 3x) = 2 - \log_2(4 - 3x)$.

Жооптор . (а)$1\frac{1}{3}$; (б) $-1\frac{1}{3}$; (в) $-\frac{3}{4}$; (г)1; (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Логарифмдер жашашы үчүн анын алдында турган туюнтмалар нөлдөн чоң болушу керек $\begin{cases} 2-3x>0, \\ 4-3x>0 \end{cases}$ ⇨

$\begin{cases} 3x<2, \\ 3x<4 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x<\frac{2}{3}, \\ x<\frac{4}{3} \end{cases}$ ⇨ $\boxed{x<\frac{2}{3}}$ же

$x \in \left(-\infty,\ \frac{2}{3}\right)$ аралыгы теңдемеге ЧЖА болот.

Логарифмдин касиеттерин пайдаланып теңдемени

$$\mathrm{Log}_2 3 - \log_2(2-3x) = 2 - \log_2(4-3x) \Rightarrow$$

$$\log_2(4-3x) - \log_2(2-3x) = 2 - \log_2 3$$

$\log_2 \frac{4-3x}{2-3x} = \log_2 4 - \log_2 3$ ⇨ $\log_2 \frac{4-3x}{2-3x} = \log_2 \frac{4}{3}$ көрүнүшүнө өзгөртүп түзөбүз. Негиздери тең болгон логарифмдер барабар болушу үчүн, логарифм алдындагы туюнтмалар да барабар болушу керек. Ошентип логарифмдик теңдеме потенцирлегенден кийин,

$\frac{4-3x}{2-3x} = \frac{4}{3}$ же $\frac{4-3x}{2-3x} - \frac{4}{3} = 0$ көрүнүшүндөгү рационалдык теңдемеге келтирилет.

Акыркы теңдемени жалпы бөлүмгө келтирип, $\frac{(4-3x)\cdot 3 - 4\cdot(2-3x)}{2-3x} = 0$ ээ болобуз. Бөлчөк нөлгө тең болушу үчүн, анын алымынын нөлгө тең болушу жетиштүү, анда берилген теңдеме

$$(4-3x)\cdot 3 - 4\cdot(2-3x) = 0 \Rightarrow 12 - 9x - 8 + 12x = 0 \Rightarrow$$

$3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$ чечимине ээ болушу мүмкүн. Болжолдонгон чечим ЧЖА га киргендиктен

$-\infty \underbrace{\_\_\_\_\_\_ -1\frac{1}{3} \_\_\_\_\_\_ 0 \_\_\_}_{\text{ЧЖА}} \frac{2}{3} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$, чынында эле

$x = -1\frac{1}{3}$ саны теңдемеге чечим болот. Туура жообу (б). ◄

ТЕКШЕРҮҮ: ... (өзүңөр)

7 – МИСАЛ : $\log_3(5x+3) = \log_3(7x+5)$.

Жооптор . (а) 1;   (б) -1 ;   (в) 2;   (г) $\frac{1}{2}$;   (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Логарифмдер жашашы үчүн анын алдында турган туюнтмалар нөлдөн чоң болушу керек $\begin{cases} 5x+3>0, \\ 7x+5>0 \end{cases}$ ⇨

$$\begin{cases} 5x>-3, \\ 7x>-5 \end{cases} \quad ⇨ \quad \begin{cases} x>-\frac{3}{5}, \\ x>-\frac{5}{7} \end{cases} \quad ⇨ \quad \boxed{x>-\frac{3}{5}}$$ же

$x \in \left(-\frac{3}{5},\ +\infty\right)$ аралыгы теңдемеге ЧЖА болот

$$\_\_\_\_ -\frac{5}{7} \underbrace{\_\_ -1 \_\_ -\frac{3}{5} \overbrace{\_\_\_\_ 0 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{x>-\frac{3}{5},\text{ЧЖА}}}_{x>-\frac{5}{7}} +\infty\ .$$

Негиздери тең болгон логарифмдердин барабар болушу үчүн, алардын алдындагы туюнтмалар да тең болушу керек, анда берилген логарифмдик теңдеме

$5x+3 = 7x+5$ ⇨ $2x = -5+3$ ⇨ $2x = -2$ ⇨ $x = -1$ ээ болушу керек. Бирок, табылган чечим ЧЖА га кирбегендиктен, теңдеменин чечими жашабайт деген жыйынтыкка келебиз.

Туура жообу (5). ◄

ТЕКШЕРҮҮ: ... (өзүңөр)

8 – МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6) = -1$.

Жооптор . (а) $1,\ 4$;   (б)4 ;   (в) 1;   (г)$2,\ 3$;   (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Логарифмдин жашашы үчүн анын алдында турган туюнтмалар нөлдөн чоң болушу керек $x^2-5x+6>0$. Оболу квадраттык үч мүчөнүн

$$x^2-5x+6=0 \quad ⇨ \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$

$$=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2},$$

$x_1=\frac{5+1}{2}=3$ жана $x_2=\frac{5-1}{2}=2$нөлдөрүн табабыз. Квадраттык үч мүчөдө $a>0$ болгондуктан, параболанын бутактары жогору карап, $x_1=3$ жана $x_2=2$ сандарынын арасында нөлдөн кичине, ал эми алардын сыртында нөлдөн чоң болот. Демек, логарифмдин жашоо аймагы ЧЖА $=(-\infty,\ 2)\cup(3,+\infty)$ аралыгы болот

$$\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_1\_\_\_}^{\text{ЧЖА: } x^2-5x+6>0}\ \underbrace{2\_\_\_\_3}_{x^2-5x+6\le0}\ \overbrace{\_\_\_\_4\_\_\_\_\_\_\_\_}^{\text{ЧЖА: } x^2-5x+6>0}\ .$$

Логарифмалык теңдемени $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)=-1\ \Leftrightarrow$

$x^2-5x+6=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\ \Leftrightarrow\ x^2-5x+6=2\ \Leftrightarrow\ x^2-5x+4=0$ квадраттык теңдемесине теңдеш өзгөртүп түзүп, анын

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2}$$
$$=\frac{5\pm3}{1},$$

$x_1=\frac{5+3}{2}=4$ жана $x_2=\frac{5-3}{2}=1$ чечимдерин табабыз. Табылган чечимдердин экөөсү тең ЧЖА га киргендиктен, берилген логарифмдик теңдеме 1, 4 чечимдерине ээ болот деген жыйынтыкка келебиз.

Туура жообу (а). ◄

ТЕКШЕРҮҮ: ......

9 – МИСАЛ : $\log_4\frac{4+2x}{x-5}=2$.

Жооптор . (а) $\frac{1}{2}$; (б) 5; (в) 5, $\frac{1}{2}$; (г) 6; (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Логарифм жашашы үчүн $\frac{4+2x}{x-5}>0$ шарты аткарылышы керек. Бөлчөк нөлдөн чоң болушу үчүн, бөлчөктүн алымы менен бөлүмү экөөсү тең бир учурда нөлдөн чоң же кичине болушу зарыл.

1) Экөөсү тең нөлдөн чоң болсун шарты $\begin{cases} 4+2x>0, \\ x-5>0 \end{cases}$ ⇨

$\begin{cases} 2x>-4, \\ x>5 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x>-2, \\ x>5 \end{cases}$ ⇨

$\boxed{x>5}$ же $x \in (5,\ +\infty)$ аралыгында аткарылат.

2) Экөөсү тең нөлдөн кичине шарты $\begin{cases} 4+2x<0, \\ x-5<0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 2x<-4, \\ x<5 \end{cases}$ ⇨

$\begin{cases} x<-2, \\ x<5 \end{cases}$ ⇨ $\boxed{x<-2}$ же $x \in (-\infty, -2)$ аралыгында аткарылат.

Бул эки учурдун кайсы бири аткарылса да логарифм жашагандыктан, теңдеменин ЧЖА сы эки учурдун биригүүсү болгон $(-\infty, -2) \cup (5,\ +\infty)$ аралыктары болот

$-\infty \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{ЧЖА}} -2 \_\_\_ 0 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 5 \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{ЧЖА}} +\infty$.

Берилген теңдемени $\log_4 \frac{4+2x}{x-5} = 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{4+2x}{x-5} = 4^2 \ \Leftrightarrow\ \frac{4+2x}{x-5} = 16$ логарифмден куткарып, эки жагын тең $x-5 \neq 0$ санына көбөйтүп жиберсек,

$4+2x = 16(x-5)$⇨$4+2x = 16x-80$ ⇨ $14x = 84$ көрүнүшүнө келип, $x = \frac{84}{14} = 6$ чечими табылат.

ТЕКШЕРҮҮ: $\log_4 \frac{4+2x}{x-5}$ ⇨ $\log_4 \frac{4+2\cdot 6}{6-5} = \log_4 \frac{16}{1} = \log_4 16 = 2$ (туура).

Туура жообу 6 же (г). ◄

10 – МИСАЛ : $\log_3(2-x^2) - \log_3(-x) = 0$.

Жооптор . (а) $-1,\ 2$; (б) 2; (в) -1 ; (г) $-\sqrt{2}$; (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Логарифмдер жашашы үчүн $\begin{cases} 2-x^2>0, \\ -x>0 \end{cases}$ шарттары аткарылышы керек.

Анда $\begin{cases} 2>x^2, \\ 0>x \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x^2<2, \\ x<0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} |x|<\sqrt{2}, \\ x<0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}, \\ x<0 \end{cases}$

⇨ $\boxed{-\sqrt{2}<x<0}$ же $x \in \left(-\sqrt{2},\ 0\right)$ аралыгы теңдемеге ЧЖА болот

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}\sqrt{2}\underbrace{\overbrace{\underline{\ \ -1\ \ \ }}^{\text{ЧЖА}}\underline{0\qquad\quad}}_{|x|<\sqrt{2}}\sqrt{2}\underline{\quad\ }2\underline{\qquad\quad}\ .$$

Логарифмдин касиеттерин пайдаланып, берилген теңдемени

$$\log_3(2-x^2)-\log_3(-x)=0 \ \Leftrightarrow\ \log_3\frac{2-x^2}{-x}=0 \ \Leftrightarrow\ \log_3\frac{x^2-2}{x}=0$$

$\Rightarrow\ \frac{x^2-2}{x}=3^0\ \ \Rightarrow\ \frac{x^2-2}{x}=1$ логарифмден куткарып, эки жагын тең $x\neq 0$ санына көбөйткөндөн кийин, $x^2-2=x \Rightarrow x^2-x-2=0$ квадраттык теңдемесине өзгөрүп, анын

$$x^2-x-2=0\ \ \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\ \pm\ \sqrt{b^2\ -\ 4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(-1)\pm\ \sqrt{(-1)^2-\ 4\cdot 1\cdot\ (-2)}}{2}=$$

$=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm\ 3}{1}$, $x_1\ =\frac{1+3}{2}=2$ жана $x_2=\frac{1-3}{2}=-1$ чечимдерин табылат. Табылган чечимдердин бирөөсү $x_2=-1$ гана теңдеменин ЧЖА сына кирет. Анда чечим катарында "-1" санын алабыз.

ТЕКШЕРҮҮ: $\log_3(2-x^2)-\log_3(-x)\Rightarrow$

$\log_3(2-(-1)^2)-\log_3\big(-(-1)\big)=\log_3(2-1)-\log_3 1=$

$=\log_3 1-0=0-0=0$ (туура). Туура жообу (в) . ◄

11 – МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{x}}5\ -\ \log_{\frac{1}{x^2}}12\ +\ \frac{1}{2}\log_x 3=1$.

Жооптор . (а)1,2 ; (б) 10; (в) 2; (г) $\frac{1}{2}$; (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Логарифмдин $\boldsymbol{\log_a b=x}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{b=\ a^x}$(Мында $\boldsymbol{a}>0$, $a\neq 1$)аныктамасына таянып, анын жашашы үчүн, $\boldsymbol{a}>0$, $a\neq 1$ шарттарынын аткарылышы зарыл экендигин көрөбүз. Демек, логарифмдерде

$$\begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \text{ жана } \frac{1}{x} \neq 1, \\ \frac{1}{x^2} > 0 \text{ жана } \frac{1}{x^2} \neq 1, \\ x > 0 \text{ жана } x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ жана } x \neq 1, \\ x \neq 0 \text{ жана } x \neq \pm 1, \Rightarrow \\ x > 0 \text{ жана } x \neq 1 \end{cases}$$

$\boxed{x > 0 \text{ жана } x \neq 1}$ шарттары

аткарылса гана теңдеме жашайт, б.а. теңдеменин ЧЖА сы

$(0,\ 1) \cup (1, +\infty)$ аралыгы болот

$$\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}0\underbrace{\text{\_\_\_\_}}_{\text{ЧЖА}}1\underbrace{\text{\_\_}1{,}2\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}}_{\text{ЧЖА}}\ .$$

Логарифмдердин касиетин пайдаланып берилген теңдемени бирдей негизге келтирип, өзгөртүүлөрдү жүргүзсөк, анда

$$\log_{\frac{1}{x}} 5 - \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2}\log_x 3 = 1 \Rightarrow \log_{x^{-1}} 5 - \log_{x^{-2}} 12 +$$

$$+ \frac{1}{2}\log_x 3 = 1 \Rightarrow \frac{1}{-1}\log_x 5 - \frac{1}{-2}\log_x 12 + \frac{1}{2}\log_x 3 = 1 \Rightarrow$$

$$-\log_x 5 + \frac{1}{2}\log_x 12 + \frac{1}{2}\log_x 3 = 1 \Rightarrow$$

$$-\log_x 5 + \log_x \sqrt{12} + \log_x \sqrt{3} = 1 \Rightarrow \log_x \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{5} = 1 \Rightarrow$$

$\log_x \frac{\sqrt{36}}{5} = 1 \Rightarrow \log_x \frac{6}{5} = 1 \Leftrightarrow x^1 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5} = 1{,}2$ чечими табылып, ЧЖА га таандык болот.

ТЕКШЕРҮҮ: $\log_{\frac{1}{x}} 5 - \log_{\frac{1}{x^2}} 12 + \frac{1}{2}\log_x 3 \Rightarrow \log_{\frac{5}{6}} 5 - \log_{\frac{25}{36}} 12 +$

$$+ \frac{1}{2}\log_{\frac{6}{5}} 3 = -\log_{\frac{6}{5}} 5 + \frac{1}{2}\log_{\frac{6}{5}} 12 + \frac{1}{2}\log_{\frac{6}{5}} 3 =$$

$$= -\log_{\frac{6}{5}} 5 + \log_{\frac{6}{5}} \sqrt{12} + \log_{\frac{6}{5}} \sqrt{3} = \log_{\frac{6}{5}} \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{5} =$$

$= \log_{\frac{6}{5}} \frac{6}{5} = 1$ (туура). Туура жообу (а). ◄

12 – МИСАЛ : $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4$.

Жооптор . (а) -7 ; (б) 7; (в) 5; (г) 1; (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Логарифмдин жашашы үчүн

$\begin{cases}(x^2+x-6)^2>0, \\ x+1>0 \text{ жана } x+1\neq 1\end{cases}$ шарттары аткарылышы керек.

Коюлган шарттардын биринчисин канааттандырган, x тердин көптүгүн аныктоо үчүн, оболу анын нөлдөрүн табалы:

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2}=$$

$$=\frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2},$$

$x_1=\frac{-1+5}{2}=2$ жана $x_2=\frac{-1-5}{2}=-3$ нөлдөрүн табабыз. Анда $y=x^2+x-6$ функциясынын графиги $a=1>0$ болгондуктан, бутактары жогору караган парабола болот, б.а. $x_2=-3$ менен $x_1=2$ нөлдөрүнүн арасында нөлдөн кичине же барабар, ал эми алардын сыртында нөлдөн чоң болот

$-\infty\overbrace{\qquad\qquad}^{x^2+x-6>0}\underbrace{-3\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_2}_{x^2+x-6\le 0}\overbrace{\qquad\qquad}^{x^2+x-6>0}+\infty$. Бирок, анын $(x^2+x-6)^2$ квадраты нөлдөрдө гана нөлгө тең болуп, калган учурда нөлдөн чоң болгондуктан x ке $x\neq-3$ менен $x\neq 2$ деген гана шарттарды коюу жетиштүү

$-\infty\overbrace{\qquad\qquad}^{X_1}-3\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_}^{X_1}2\overbrace{\qquad\qquad}^{X_1}+\infty$.

Ошентип $X_1=(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ 2)\cup(2,+\infty)$ аралыгында системанын биринчи жолчосундагы шарт аткарылат.

Коюлган шарттардын экинчисин канааттандырганx тердин көптүгү

$x+1>0$ жана $x+1\neq 1\Rightarrow$ $x>-1$ жана $x\neq 0$ шарттары

$X_2=(-1,\ 0)\cup(0,+\infty)$ аралыгы болот

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ -1 \ \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{X_2:\, x>-1 \wedge x\neq 0} \ 0 \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{X_2:\, x>-1 \wedge x\neq 0}$.

Бул эки шартты тең канааттандырган x тер эки шарттын кесилишүү аралыгы катарында ЧЖА ны түзөт:

$$X_1 \cap X_2 = \{(-\infty, \quad -3) \cup (-3, \quad 2) \cup (2, +\infty)\} \cap \{(-1, \quad 0) \cup (0, +\infty)\} =$$

$= (-1,\ 0) \cup (0,\ 2) \cup (2, +\infty)$.

$\_\_\_\_\_\_\_ -7 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ -3 \_\_\_\_ -2 \_\_\_\_ -1 \overbrace{\_\_}^{\text{ЧЖА}} 0 \overbrace{\_\_\_1\_\_\_}^{\text{ЧЖА}} 2 \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{\text{ЧЖА}} +\infty$.

Берилген логарифмдик теңдемеге теңдеш өзгөртүүлөрдү жүргүзүп, логарифмден куткарсак (потенцирлесек),

$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4 \ \Leftrightarrow \ (x^2 + x - 6)^2 = (x+1)^4 \Rightarrow$

$(x+1)^2 = \pm(x^2 + x - 6)$кош маани келип чыгат. Аларды:

1) $(x+1)^2 = +(x^2 + x - 6)$ же $x^2 + 2x + 1 = x^2 + x - 6$ же $2x - x = -6 - 1$ же $x = -7$ чечимин табабыз. Табылган чечим ЧЖА га кирбейт же теңдемеге чечим боло албайт.

2) $(x+1)^2 = -(x^2 + x - 6) \ \Rightarrow \ x^2 + 2x + 1 = -x^2 - x + 6$

$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$квадраттык теңдемесине ээ болуп, анын

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4},$$

$x_1 = \frac{-3+7}{4} = 1$ жана $x_2 = \frac{-3-5}{2} = -2$ чечимдерин табабыз. Табылган чечимдердин бири $x_1 = 1$ гана ЧЖА га кирип, туура чечим боло алат.

ТЕКШЕРҮҮ: $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 \ \Rightarrow \ \log_{1+1}(1^2 + 1 - 6)^2 =$

$= \log_2(-4)^2 = \log_2 16 = 4.$

Туура жообу (г). ◄

13 – МИСАЛ : $(2x^2 - 5x + 2) \cdot (\log_{2x} 18x + 1) = 0$.

Жооптор . (а)2, $\pm\frac{1}{6}$; (б) 2, $\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{6}$; (в) 2, $\frac{1}{6}$; (г) 6, 1; (д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Теңдемеге катышкан логарифмдин жашашы үчүн

$$\begin{cases} 2x > 0 \text{ жана } 2x \neq 1, \\ 18x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ жана } x \neq \frac{1}{2}, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(0,\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}$$

шарттары аткарылышы керек, б.а. ЧЖА $= \left(0,\ \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ аралыгы болот

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ 0 \overbrace{\_\ \frac{1}{6}\ \_}^{\text{ЧЖА}} \frac{1}{2} \overbrace{\_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_}^{\text{ЧЖА}} + \infty\ .$$

Эки сандын көбөйтүндүсү нөлгө тең болушу үчүн, алардын бирөөсүнүн нөлгө тең болушу жетиштүү.

1) $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} =$

$= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$, $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$ жана $x_2 = \frac{5-3}{4} = -\frac{1}{2}$ чечимдери табылып, алардын бирөөсү $x_1 = 2$ гана ЧЖА га таандык болуп, туура чечимдин бири катарында кабыл алынат.

Экинчи көбөйтүүчүнү нөлгө теңдейли:

2) $\log_{2x} 18x + 1 = 0 \Leftrightarrow \log_{2x} 18x = -1 \Leftrightarrow 18x = (2x)^{-1} \Leftrightarrow$
$18x = \frac{1}{2x}$. Мындан теңдеменин эки жагын тең $2x \neq 0$ (ЧЖА нын чегинде) санын көбөйтүп,

$36x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{36}} = \pm\frac{1}{6}$ эки чечимдерге ээ болобуз. Бирок, алардын бири "$+\frac{1}{6}$" гана ЧЖА га кирип, экинчи туура чечим боло алат.

Анда эки учурда табылган туура чечимдер 2, $+\frac{1}{6}$ сандары же (а) .◄

3. Логарифмалык барабарсыздыктарды чыгаргыла .

14 – МИСАЛ : $\log_2(7-x)<3$.

Жооптор . (а)$(-1,+\infty)$; (б)$(-\infty,\ 7)$; (в)$(-1,\ 7)$;

$$(г)(-7, \quad 1);\quad (д)[-1, \quad 7)\,.$$

► ЧЫГАРУУ. Логарифмалык барбарсыздыктын жашашы үчүн

$7-x>0 \ \Rightarrow\ x<7$ шарты аткарылып, $x\in(-\infty,\ 7)$ аралыгы ЧЖА болот

$$-\infty\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ -1\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{\text{ЧЖА}}7\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

$y=\log_a u$ логарифмалык функциясы $a>1$ болгондо монотондуу өсүүчү болот, б.а. чоң u га функциянын чоң мааниси туура келет. Бизде $a=2>1$, ошондуктан

$\log_2(7-x)<3 \Leftrightarrow\ 7-x<2^3\ \Leftrightarrow$

$x>7-8=-1\ \ \Leftrightarrow\ \ x>-1$ келип чыгып, барабарсыздыктын чыгарылыш аралыгы $\mathrm{X}=(-1,+\infty)$ болушу мүмкүн

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_-1\underbrace{\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ 7\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\mathrm{X}}.$$

Бул аралык менен барбарсыздыктын ЧЖА сынын кесилиши

$$\mathrm{X}\cap\text{ЧЖА}=(-1,+\infty)\cap(-\infty, \quad 7)=(-1, \quad 7)$$

туура чыгарылыш аралыгы болот. Туура жообу (в). ◄

15 – МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{5}}(2x+3)>-3$.

Жооптор . (а)$(61,+\infty)$; (б)$\left(-\frac{3}{2},\ 61\right)$; (в)$(-\infty,\ 61)$;

$$(г)\left(\frac{3}{2}, \quad 64\right);\quad (д)\left[-\frac{3}{2}, \quad 61\right).$$

► ЧЫГАРУУ. Барабарсыздыктын жашашы үчүн $2x+3>0 \ \ \Rightarrow$

$x>-\frac{3}{2}$ шарты талап кылынгандыктан, ЧЖА $=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$ аралыгы болот

$$-\infty\_\_\_\_\_\_\_-\underbrace{\frac{3}{2}\overbrace{\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{\text{Туура чыгарылыш}}61\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{ЧЖА}}+\infty\,.$$

Логарифмдин негизи $a = \frac{1}{5} < 1$ болгондуктан, $у = \log_a u$ логарифмалык функциясы монотондуу кемүүчү болуп, u аргументинин чоң маанисине функциянын кичине у мааниси туура келет. Ошондуктан $\log_{\frac{1}{5}}(2x+3) > -3 \ \Leftrightarrow \ 2x + 3 < \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ же логарифмден куткарганда чоң тарап кичине болду.

Мындан $2x < \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - 3 = 5^3 - 3 \quad ⇨ \quad x < \frac{5^3-3}{2} = \frac{125-3}{2} = \frac{122}{2} =$ 61 келип чыгып, чыгарылыш аралыгы $(-\infty,\ 61)$ болушу мүмкүн деген жооп алабыз.

Бул жоопту ЧЖА менен салыштырып, туура чыгарлыш аралыгы $\left(-\frac{3}{2},\ 61\right)$ болорун көрөбүз. Туура жообу (б). ◄

16 – МИСАЛ : $\lg 2x < 2\lg 7 + 1$.

Жооптор . (а)$(-\infty,\ 245)$; (б)$(245, +\infty)$; (в)$[0,\ 56)$;

(г)$[0,\quad 245)$; (д)$(0,\quad 245)$.

► ЧЫГАРУУ. Негизи $a = 10$ болгондо $\log_{10} b = \lg b$ деп жазуу кабыл алынган.

Логарифм жашашы үчүн, анын алдында турган туюнтма нөлдөн чоң болушу керек.$2x > 0 \quad ⇨ \quad x > 0$ шарты аткарылган x чекиттеринин көптүгү, же $(0, +\infty)$ аралыгы теңдеменин ЧЖА сы болот

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{\text{ЧЖА}}+\infty\,.$$

Логарифмдин касиеттерин пайдаланып, берилген барабарсыздыкты

$\lg 2x < 2\lg 7 + 1 \Leftrightarrow \lg 2x < \lg 7^2 + \lg 10 \ \Leftrightarrow \ \lg 2x < \lg(7^2 \cdot 10) \ \Leftrightarrow$

$\lg 2x < \lg 490$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп түзөбүз.

Негизи бирден чоң болгондо логарифмдик функция өсүүчү болгондуктан (§2.18 – кара), логарифмдердин алдында турган туюнтмалардын чоңунун логарифми чоң болот.

Анда $2x < 490 \Rightarrow x < \frac{490}{2} = 245$ же $x \in X = (-\infty,\ 245)$ чыгарылыш аралыгына ээ болобуз $-\infty \underbrace{\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{X} 245\_\_\_\_$. Аны ЧЖА менен салыштырып, туура чыгарылыш аралыгын $(0,\ 245)$ табабыз. Туура жообу (д). ◄

17 – МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 7x + 10) > -2$.

Жооптор . (а)$(-\infty, -1)$; (б)$(-6, -5] \cup [-2, -1)$;

(в)$(-6, -5) \cup (-2, -1)$; (г)$(1,\quad 6)$; (д)$(1,\quad 2) \cup (5,\quad 6)$.

► ЧЫГАРУУ. Логарифм жашашы үчүн $x^2 + 7x + 10 > 0$ шарты аткарылышы керек.

Оболу $y = x^2 + 7x + 10$ функциясынын нөлдөрүн табалы:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2},$$

$x_1 = \frac{-7+3}{2} = -2$ жана $x_2 = \frac{-7-3}{2} = -5$. Функциядax^2 тын коэффициенти $a = 1 > 0$ болгондуктан, анын графиги болгон параболанын бутактары жогору карап, нөлдөрдүн арасында нөлдөн кичине же барабар, ал эми алардын сыртында нөлдөн чоң

$$-\infty \overbrace{\_\_\_\_\_ -6 \_\_\_}^{\text{ЧЖА: } x^2+7x+10>0} \underbrace{-5\_\_\_\_\_\_ -2}_{x^2+7x+10 \le 0} \overbrace{\_\_\_ -1 \_\_\_ 0 \_\_\_\_\_\_\_\_}^{\text{ЧЖА: } x^2+7x+10>0} +\infty .$$

Ошондуктан барабарсыздыктын ЧЖА сы $(-\infty, -5) \cup (-2, +\infty)$ аралыктары болот.

Логарифмдин негизи $\frac{1}{2} < 1$, логарифмалык функция монотондуу кемүүчү болуп, логарифм алдындагы туюнтманын чоңунун логарифми кичине болот. Анда логарифмдик барабарсыздыкты

$x^2 + 7x + 10 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөрөтө алабыз. Мындан

$x^2 + 7x + 10 < 2^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 7x + 10 < 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 7x + 6 < 0$ ээ болобуз.

у $= x^2 + 7x + 6$ функциясынын нөлдөрү

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2},$$

$x_1 = \frac{-7+5}{2} = -1$ жана $x_2 = \frac{-7-5}{2} = -6$ сандары болушат. Функциянын графиги бутактары жогору караган парабола болгондуктан

$$\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_ -6}^{x^2+7x+6 \geq 0}\underbrace{\_\_ -5 \_\_\_\_\_\_\_\_\_ -2 \_\_}_{x^2+7x+6<0}\overbrace{-1 \_\_ 0 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{x^2+7x+6 \geq 0},$$

барабарсыздыктын чыгарылышы $(-6, -1)$ аралыгы болушу мүмкүн.

Табылган чыгарылыш аралыгы ЧЖА кирер – кирбесин текшерели. Схемаларды салыштырып,$(-6, -5) \cup (-2, -1)$ аралыктары туура чыгарылыш болорун көрөбүз.

Туура жообу (в) . ◄

18 – МИСАЛ : $\lg(3x - 4) < \lg(2x + 1)$.

Жооптор . (а) $\left(\frac{4}{3}, 5\right)$; (б) $\left[\frac{4}{3}, 5\right)$; (в) $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$; (г) $\left[-\frac{1}{2}, 5\right)$;

(д) $\left(-\frac{1}{2}, \quad \frac{4}{3}\right)$.

►ЧЫГАРУУ. Ондук логарифмдердин (негизи 10 болгон) жашашы үчүн, алардын алдында турган туюнтмалар нөлдөн чоң болушу керек. Анда

$\begin{cases} 3x - 4 > 0, \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 4, \\ 2x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3}, \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > \frac{4}{3}}$ же $x \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ аралыгы

барабарсыздыктын ЧЖА сы болот.

Берилген барабарсыздыкка катышкан логарифмдердин негизи 10 болуп, бирден чоң болгондуктан, $y = \log_a u$ функциясы монотондуу өсүүчү болуп, у тин чоңуна u нун чоңу (жана тескерисинче) тиешелеш коюлат. Ошондуктан берилген барабарсыздык

$$\lg(3x-4) < \lg(2x+1) \Leftrightarrow \ 3x-4 < 2x+1 \ \Leftrightarrow \ 3x-2x < 4+1 \ \Leftrightarrow$$

$x < 5$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүлүп, $(-\infty,\ 5)$ чыгарылыш аралыгына ээ болот.

Табылган чыгарылыш аралыгын ЧЖА менен салыштырып, алардын кесилиши болгон $\left(\frac{4}{3},\ 5\right)$ аралыгы туура чыгарылыш аралыгы болорун көрөбүз

$$\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}0\text{\_\_\_\_\_\_\_}\underbrace{\overbrace{\tfrac{4}{3}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}5}^{\text{чыгарылыш}}\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}}_{\text{ЧЖА}}+\infty\ .$$

Туура жообу (а). ◄

19 – МИСАЛ : $\frac{\lg x+1}{4x-1} < 0$.

Жооптор . (а) $\left(0,\ \frac{1}{10}\right)$; (б) $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$; (в) $\left(\frac{1}{10},\ \frac{1}{4}\right)$;

(г) $\left[0,\quad \frac{1}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$; (д) $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

►ЧЫГАРУУ. Бөлчөк жашашы үчүн анын бөлүмү нөлдөн айырмалуу болушу, ал эми логарифм жашашы үчүн анын алдында турган туюнтма нөлдөн чоң болушу керек. Анда

$\begin{cases} 4x-1 \neq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{4}, \\ x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \boxed{\left(0,\ \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)}$ аралыгы барабарсыздыкка ЧЖА болот.

Бөлчөк эки учурда нөлдөн кичине болушу мүмкүн:

1) Алымы нөлдөн чоң, бөлүмү нөлдөн кичине шарты

$$\begin{cases} \lg x + 1 > 0, \\ 4x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x > -1, \\ 4x < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases}\text{негизи бирден чоң} \Rightarrow x > 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1, \\ x < \frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{10} < x < \frac{1}{4}}$ же

$\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right)$ аралыгында аткарылат.

2) Алымы нөлдөн кичине, бөлүмү нөлдөн чоң шарты

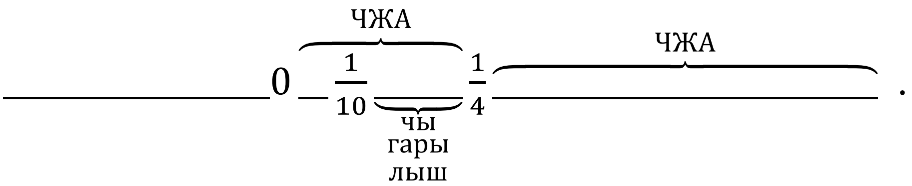
$\begin{cases}\lg x + 1 < 0, \\ 4x - 1 > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lg x < -1, \\ 4x > 1\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}\text{негизи бирден чоң} \Rightarrow x < 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1, \\ x > \frac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{биргелешпеген}}$,

себеби x саны бир учурда $\frac{1}{10}$ дон кичине, ал эми $\frac{1}{4}$ ден чоң боло албайт.

Демек, барабарсыздыктын чыгарылышы катарында 1) – учурду алышыбыз мүмкүн. Анын ЧЖА кирген

$\left\{\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)\right\} \cap \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{4}\right)$ бөлүгү туура чыгарылыш болот



Туура жообу (в). ◄

20– МИСАЛ : $\log_2(x-1) + \log_2 x < 1$.

Жооптор . (а)$(-1, 2)$; (б)$(1, 2)$; (в)$[1, 2)$; (г)$(2, +\infty)$;

(д)$(-1, 1)$.

►ЧЫГАРУУ. Логарифмдер жашашы үчүн, алардын алдындагы туюнтмалар нөлдөн чоң болушу керек:

$\begin{cases}x - 1 > 0, \\ x > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x > 1, \\ x > 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 1}$. Анда $(1, +\infty)$ аралыгы барбарсыздыктын ЧЖА сы болот.

Логарифмдин касиеттерин пайдаланып барабарсыздыкты

$\log_2(x-1)+\log_2 x<1 \Leftrightarrow \log_2[(x-1)\cdot x]<1 \Leftrightarrow \log_2(x^2-x)<1$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп түзөбүз. Логарифмдин негизи болгон 2 саны 1 ден чоңболгондуктан, логарифмалык функция монотондуу өсүп, аргументи чоңу чоң болот, ошондуктан берилген барабарсыздыкты логарифмден куткарсак,

$x^2-x<2^1 \Rightarrow x^2-x-2<0$ келип чыгат.

у $=x^2-x-2$функциясынын нөлдөрүн

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}=\frac{1 \pm 3}{2},$$

$x_1=\frac{1+3}{2}=2$ жана $x_2=\frac{1-3}{2}=-1$ табабыз. Квадраттык үч мүчөдө

$a=1>0$ болгондуктан, функциянын графиги болгон параболанын бутактары жогору карап, нөлдөрүнүн арасында нөлдөн кичине, алардын сыртында нөлдөн чоң болот

$$-\infty\overbrace{\qquad\qquad}^{x^2-x-2>0}-1\underbrace{\_\_\_0\_\_\_1\_\_\_}_{x^2-x-2<0}2\overbrace{\qquad\qquad}^{x^2-x-2>0}+\infty$$. Анда чыгарылыш аралыгы $(-1,\ 2)$ болушу келип чыгат. Табылган чыгарылыш аралыгынын ЧЖА га кирген $(1,+\infty)\cap(-1,\ 2)=(1,\ 2)$ бөлүгү туура чечим болот. Туура жообу $(1,\ 2)$ аралыгы же (б). ◄

21– МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x+1}{x-2}>-1$.

Жооптор . (а)$(-\infty,\ 2)$;   (б)$(2,+\infty)$;   (в) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$;

(г) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$;   (д) $\left[-\frac{1}{3},\quad 2\right)$.

►ЧЫГАРУУ. Логарифм алдындагы туюнтма нөлдөн чоң болсо гана жашайт $\frac{3x+1}{x-2}>0$.

Ал эми бөлчөк эки учурда нөлдөн чоң болушу мүмкүн:

1) Алымы жана бөлүмү нөлдөн чоң шарты

$\begin{cases} 3x+1>0, \\ x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x>-1, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{3}, \\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x>2}$ же

$(2,+\infty)$ аралыгында аткарылат.

2) Алымы жана бөлүмү нөлдөн кичине шарты

$\begin{cases} 3x+1<0, \\ x-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x<-1, \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\frac{1}{3}, \\ x<2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x<-\frac{1}{3}}$ же

$\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)$ аралыгында аткарылат. Анда барабарсыздыктын ЧЖА сы эки учурдун ЧЖА $=\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ биригүүсүнөн

$$-\infty\ \underbrace{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{ЧЖА}}\ -\frac{1}{3}\ \_\ 0\ \_\_\_\_\_\_}_{\text{X}}2\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{ЧЖА}}\ +\infty$$ турат.

Барабарсыздыктагы логарифмдин негизи болгон $\frac{1}{3}$ саны бирден кичине болгондуктан,$y=\log_a u$ функциясы монотондуу кемүүчү болуп, аргументтердин кичине u маанилерине, функциянын чоң маанилери (у тер) тиешелеш коюлат. Ошондуктан логарифмден куткарганда барабарсыздыктын белгиси өзгөрөт$\frac{3x+1}{x-2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$. Мындан

$\frac{3x+1}{x-2}<3 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-2}-3<0 \Rightarrow \frac{3x+1-3(x-2)}{x-2}<0 \Rightarrow \frac{7}{x-2}<0$ келип чыгып, бөлчөктүн алымы 7 нөлдөн чоң болгондуктан, бөлүмү нөлдөн кичине болсо гана бөлчөк нөлдөн кичине болуп, $x-2<0 \Rightarrow x<2$ же $x\in(-\infty,\ 2)=\text{X}$ чыгарылыш аралыгы болот.

Табылган X чыгарылыш аралыгы менен ЧЖА нын кесилилиш бөлүгү

ЧЖА $\cap\ \text{X}=\left\{\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)\cup(2,+\infty)\right\}\cap(-\infty,\ 2)=\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right)$ туура жооп болот.

Туура жообу (г)$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$. ◄

22– МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^{x}) \geq -2$.

Жооптор . (а)$(1,\ 5)$; (б)$[1,\ 5)$; (в)$[0,\ \log_6 5)$; (г)$(0,\ \log_6 5)$;

(д)$(-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5,\ 1)$.

►ЧЫГАРУУ. Логарифмдин жашашы үчүн, анын алдында турган туюнтманын нөлдөн чоң болушу зарыл, анда $6^{x+1} - 36^{x} > 0 \Rightarrow\ 6^{x+1} > 6^{2x} \Rightarrow x + 1 > 2x \Rightarrow x < 1$ болуп,

$(-\infty,\ 1)$ аралыгы ЧЖА болот.

Негизи $\frac{1}{\sqrt{5}} < 1$ болгондо логарифмалык функция кемигендиктен, логарифмден куткарганда барбарсыздыктын белгиси (чоң, кичине) өзгөрөт. Ошондуктан

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^{x}) \geq -2 \Leftrightarrow\ 6^{x+1} - 36^{x} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2} \Rightarrow$$

$6 \cdot 6^{x} - 6^{2x} \leq 5 \Rightarrow -6^{2x} + 6 \cdot 6^{x} - 5 \leq 0$ эки жагын тең (-1) ге көбөйтсөк, $\Rightarrow\ 6^{2x} - 6 \cdot 6^{x} + 5 \geq 0$ келип чыгат.

Мындан $6^{x} = \text{y},\ \text{y} > 0$ белгилөөсүн киргизсек, анда $\text{y}^2 - 6\text{y} + 5 \geq 0$ квадраттык барабарсыздыгына ээ болобуз. Оболу анын нөлдөрүн табалы

$$\text{y}^2 - 6\text{y} + 5 = 0 \Rightarrow\ \text{y}_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c}}{a} = -(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \cdot 5} =$$

$= 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$, $\text{y}_1 = 3 + 2 = 5$ жана $\text{y}_2 = 3 - 2 = 1$. Табылган нөлдөрдүн экөөсү тең $\text{y} > 0$ шартын канааттандырат.

Барабарсыздыкты чыгаруунун эки усулун көрсөтөлү:

1 – усул. y^2 тын коэффициенти 1 саны нөлдөн чоң болгондуктан, $u = \text{y}^2 - 6\text{y} + 5$ функциясынын графиги болгон параболанын бутактары жогору карап, нөлдөрүнүн арасында терс, ал эми алардын сыртында оң же нөлдөн чоң же барабар болуп,

$$-\infty \overbrace{\underline{\qquad\qquad} 0 \underline{\quad} 1}^{y^2-6y+5\geq 0} \underbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad}}_{y^2-6y+5<0} \overbrace{5 \underline{\qquad\qquad\qquad}}^{y^2-6y+5\geq 0} +\infty$$

чыгарылыш$(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ аралыгына ээ болушу керек эле. Бирок,$y > 0$ шарты коюлгандыктан, болжолдонгон чыгарылыш катарында $(0,\ 1] \cup [5, +\infty)$ аралыктарын алабыз. Мындан

$y = 6^x$ болгондуктан, $\{0 < 6^x \leq 6^0\} \cup \{5 \leq 6^x < +\infty\}$ $\Leftrightarrow$

(негизи бирден чоң) $\Leftrightarrow \{-\infty < x \leq 0\} \cup \{\log_6 5\ \leq x < +\infty\} =$

$= (-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5\,, +\infty)$чыгарылыш аралыктары

табылат. Алардын барабарсыздыктын ЧЖА сы менен кесилиши

$$-\infty \underbrace{\overbrace{\underline{\qquad\qquad\qquad} 0}^{\text{Чыг}} \underline{\quad} \overbrace{\log_6 5 \underline{\quad}}^{\text{Чыг}}}_{\text{ЧЖА}} 1 \underline{\qquad\qquad} \text{ болгон}$$

$(-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5\,,\ 1)$ аралыгы туура чечим болот.

2) – усул. $y^2 - 6y + 5 = (y - y_1)(y - y_2) = (6^x - 1)(6^x - 5)$ көбөйтүүчүлөрүнө ажыратып, квадраттык барабарсыздыкты

$(6^x - 1)(6^x - 5) \geq 0$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртөбүз. Эки сандын көбөйтүндүсү экөө тең бир учурда оң, же болбосо терс болгон учурларда гана оң болот.

Экөөсүн тең оң десек $\begin{cases} 6^x - 1 \geq 0, \\ 6^x - 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^x \geq 1, \\ 6^x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 6^x \geq 6^0, \\ 6^x \geq 5 \end{matrix}$

негиздери 6 бирден чоң болгондо көрсөткүчтүү функция өскөндүктөн

$\begin{cases} \quad x \geq 0, \\ x \geq \log_6 5\ \text{(анткени } 6^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_6 5) \end{cases} \Rightarrow$

жалпылаганда $\boxed{x \geq \log_6 5}$ же $[\log_6 5\,, +\infty)$ чыгарылышы табылат.

Экөөсүн тең нөлдөн кичине же барабар десек

$\begin{cases} 6^x - 1 \leq 0, \\ 6^x - 5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^x \leq 1, \\ 6^x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 6^x \leq 6^0, \\ 6^x \leq 5 \end{matrix}$ негиздери 6, бирден чоң болгондо көрсөткүчтүү функция өскөндүктөн,

$$\begin{cases} x \le 0, \\ x \le \log_6 5 \ \text{(анткени } 6^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_6 5) \end{cases} \Rightarrow$$

жалпылаганда $\boxed{x \le 0}$ же $(-\infty,\ 0]$ чыгарылышы табылат.

Эки учурду бириктирип $[\log_6 5, +\infty) \cup (-\infty,\ 0]$ болжолдуу чыгарылыш аралыгына ээ болобуз.

Табылган болжолдуу чыгарылыш аралыктары менен барабарсыздыктын ЧЖА сынын кесилиши болгон

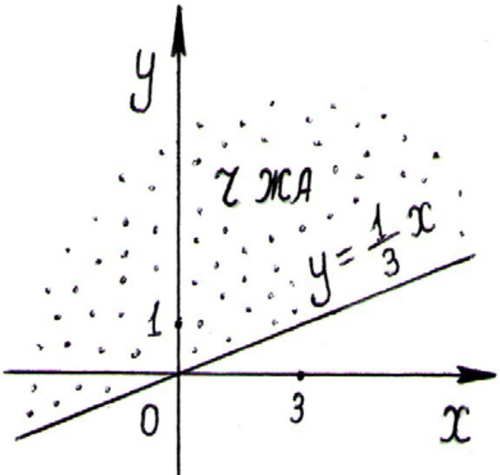
$\{[\log_6 5, +\infty) \cup (-\infty,\ 0]\} \cap (-\infty,\ 1) = (-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5,\ 1)$ аралыгы туура чыгарылыш болот. Туура жообу (д). ◄

4.Теңдемелер системасын чыгаргыла.

23– МИСАЛ : $\begin{cases} 4x + y = -10, \\ \log_3(3y - x) = 2\,. \end{cases}$

Жооптор .
(а)$(2; -3)$, (б)$(-3;\ 2)$, (в)$(-1;\ -6)$, (г)$(3;\ 2)$, (д)$(3, -2)$.

►ЧЫГАРУУ. Логарифмалык функциянын жашашы үчүн $3y - x > 0$ же $y > \frac{1}{3}x$ шарты аткарылышы керек. Анда теңдемелер системасынын ЧЖА сы координаттык тегиздикте $y = \frac{1}{3}x$ түзүнүн жогору жагында жайгашкан чекиттердин көптүгү болот (1.16 – чийме).



1.16-чийме

Логарифдин аныктамасы боюнча экинчи жолчону логарифмден куткарып (потенцирлеп), системаны

$$\begin{cases} 4x + y = -10, \\ 3y - x = 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = -10, \\ -x + 3y = 9 \end{cases}$$

көрүнүшүнө келтиребиз. Экинчи жолчону 4 кө көбөйтүп биринчисине кошуп жиберсек, анда чечим болуучу чекиттин ординатасы

$$13y = 36 - 10 \quad \Rightarrow \quad 13y = 26 \quad \Rightarrow$$

$y = 2$ болорун көрөбүз. Табылган маанини биринчи жолчого коюп, чечим болгон чекиттин абсциссасын $4x + 2 = -10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-12}{4} = -3$ табабыз. $(-3;\ 2)$ координаталуу чекит же түгөй сандар системанын ЧЖА сына кирерин текшеребиз: $y > \frac{1}{3}x \Leftrightarrow 2 > \frac{1}{3}(-3) = -1$ (туура).

Туура жообу (б). ◄

24– МИСАЛ : $\begin{cases} x \cdot y = 16, \\ x^{\log_2 y} = 8\,. \end{cases}$

Жооптор . (а)$(2;\ 8), (8;\ 2)$; (б)$(4;\ 4)$; (в)$(1;\ 16)$; (г)$(16;\ 1)$;

(д)$(-1, -16),\ (-16,\ 1)$.

►ЧЫГАРУУ. Теңдемелер системасынын биринчи жолчосуна чектөөлөр коюлбайт, анткени каалагандай эле чектүү сандарды өз ара көбөйтүүгө болот. Ал эми экинчи жолчодо көрсөткүчтүү функциянын негизи катарында $x > 0$ жана $x \neq 1$ шарттарын канааттандырышы керек. Логарифманын алдында турган туюнтма катарында y ке $y > 0$ шарты коюлат. Анда системанын ЧЖА сы $\begin{cases} x > 0,\ x \neq 1, \\ y > 0 \end{cases}$ шарттарына баш ийген координаттык тегиздиктин 1 – чейрегинде жайгашкан чекиттер болушат.

Системанын жолчолорун 2 негизи боюнча логарифмдеп,

$\begin{cases} \log_2(x \cdot y) = \log_2 16\,, \\ \log_2 x^{\log_2 y} = \log_2 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 y + \log_2 x = 4\,, \\ \log_2 y \cdot \log_2 x = 3 \end{cases}$ көрүнүшүнө

келтиребиз. $u = \log_2 x,\ v = \log_2 y$ белгилөөлөрүн киргизсек, $\begin{cases} u + v = 4, \\ u \cdot v = 3 \end{cases}$ системасы келип чыгат. Биринчиден $u = 4 - v$ маанисин таап, экинчисине коюп$(4 - v) \cdot v = 3 \quad \Rightarrow 4v - v^2 - 3 = 0$ же $v^2 - 4v + 3 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз. Анын чечимдерин $v_{1,2} =$

$\frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c}}{a} = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 3} = 2 \pm \sqrt{1} =$

$= 2 \pm 1\,, v_1 = 2 + 1 = 3\,,\ v_2 = 2 - 1 = 1$ тапкан соң,

$u = 4 - v$ экендигин пайдаланып $u_1 = 4 - v_1 = 4 - 3 = 1\,,$

$u_2 = 4 - v_2 = 4 - 1 = 3$ аныктайбыз.

Белгилөөлөргө кайрылып:

1) $u = \log_2 x \quad \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \log_2 x_1, \\ u_2 = \log_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2^{u_1} = 2^1 = 2, \\ x_2 = 2^{u_2} = 2^3 = 8. \end{cases}$

2) $v = \log_2 y \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \log_2 y_1, \\ v_2 = \log_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2^{v_1} = 2^3 = 8, \\ y_2 = 2^{v_2} = 2^1 = 2 \end{cases}$

чечимдерин табабыз. Ошентип, $(x_1;\ y_1) = (2;\ 8)$ жана

$(x_2;\ y_2) = (8;\ 2)$ чекиттери координаттык тегиздиктин 1 – чейрегинде жайгашып, системанын ЧЖА сына таандык болушуп системанын туура чечимдери болушат. Туура жообу (а). ◄

§1.6Тригонометрия. Теңдеш өзгөртүүлөр

1.Эсептөөлөр.

1– МИСАЛ :$\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ жана $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ экендиги белгилүү болсо,

анда $\sin\alpha$ ны эсептегиле.

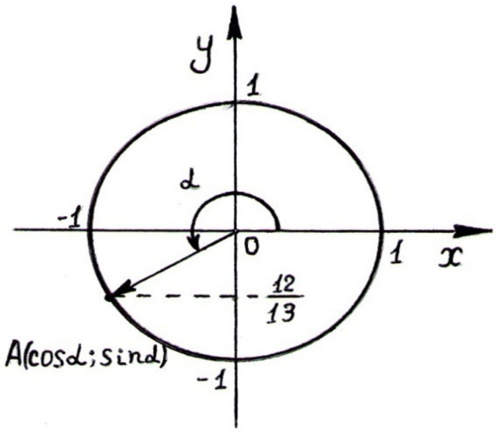
Жооптор . (а) $\frac{12}{13}$; (б) $-\frac{12}{13}$; (в) $\frac{\sqrt{194}}{13}$; (г) $-\frac{\sqrt{194}}{13}$; (д) $\frac{1}{13}$.

►ЭСЕПТӨӨ. α бурчу координаттык тегиздиктин III – чейрегинде жайгашары белгилүү.

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ формуласын пайдаланып,

$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}, \Rightarrow sin^2\alpha = \frac{144}{169} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$ ээ болобуз.

α бурчу III – чейректе жайгашкандыктан $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ деген туура жоопту табабыз (б) (1.17 – чийме). ◄



1.17-чийме

2 – МИСАЛ : Эгерде $\sin\alpha = \frac{8}{17}$ жана $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (II – чейрек) экендиги белгилүү болсо, анда $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$ ны эсепте.

Жооптор . (а) $\frac{7\sqrt{3}-4}{34}$; (б) $\frac{8-15\sqrt{3}}{34}$;

(в) $-\frac{8+15\sqrt{3}}{34}$; (г) $-\frac{4-7\sqrt{3}}{34}$;

(д) $\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$.

►ЭСЕПТӨӨ. Бурчтардын айырмасынын косинусу боюнча

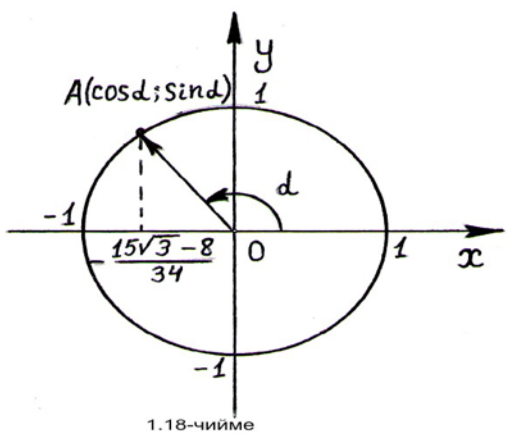
$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha =$$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{17} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{4}{17}$ келип чыгат.

Экинчи жактан $cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1 - \frac{64}{289} =$

$= \frac{289-64}{289} = \frac{225}{289} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{225}{289}} = \pm\frac{15}{17}$ ээ болобуз.

α бурчу II – чейректе жайгашкандыктан $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$.



1.18-чийме

Анда $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{4}{17} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{15}{17}\right) + \frac{4}{17} =$

$= -\frac{15\sqrt{3}}{34} + \frac{4}{17} = \frac{-15\sqrt{3}+8}{34} = \frac{8-15\sqrt{3}}{34}$ жообу табылат (1.18 – чийме). Туура жообу (б). ◄

3 – МИСАЛ : $\sin^2 15^0 - 2\sin 15^0 \cos 15^0 + \cos^2 15^0$ эсептегиле.

Жооптор . (а) 1 ;   (б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;   (в) $\frac{1}{2}$;   (г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;   (д) -1 .

►ЭСЕПТӨӨ. $\mathrm{Sin}^2 15^0 - 2\sin 15^0 \cos 15^0 + \cos^2 15^0 =$

$= \sin^2 15^0 + \cos^2 15^0 - 2\sin 15^0 \cos 15^0 = 1 - \sin 30^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
жообуна ээ болобуз. Мында $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ формулаларын колдондук. Туура жообу (в). ◄

4 – МИСАЛ : $\frac{\sin 70^0 + \sin 20^0}{\cos 25^0}$ эсептегиле.

Жооптор . (а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;   (б)$\sqrt{2}$;   (в) $\frac{1}{2}$;   (г) -2;   (д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

►ЭСЕПТӨӨ. $\frac{\mathrm{Sin}\, 70^0 + \sin 20^0}{\cos 25^0} = \frac{2\sin\frac{70^0+20^0}{2}\cdot\cos\frac{70^0-20^0}{2}}{\cos 25^0} = \frac{2\sin 45^0\cdot\cos 20^0}{\cos 25^0} =$

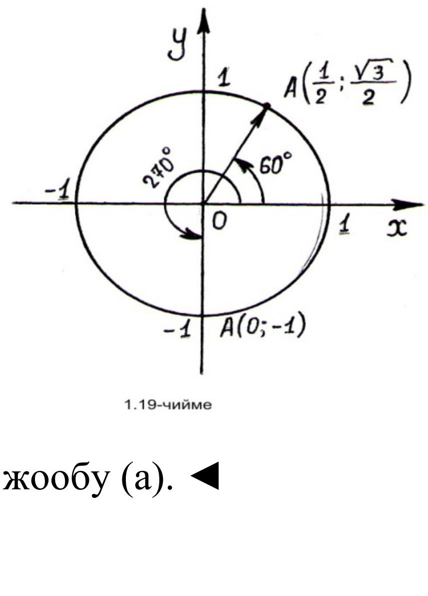
$= 2\sin 45^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ жообу табылат.

Мында $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ формуласыколдонулду.

Туура жообу (б). ◄

5 – МИСАЛ : $\frac{cos^2 75^0 - sin^2 75^0}{\sin 270^0}$ эсептегиле.

Жооптор . (а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;   (б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;   (в) $\frac{1}{2}$;   (г) $-\frac{1}{2}$;   (д)1 .

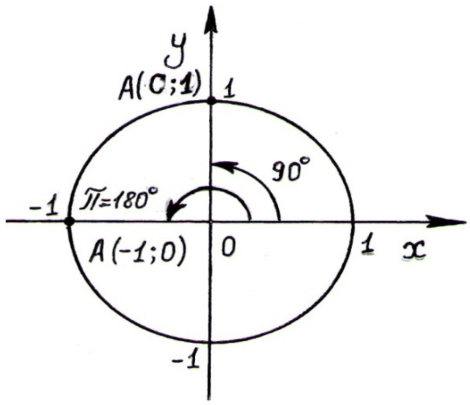


1.19-чийме

►ЭСЕПТӨӨ. $\frac{cos^2 75^0 - sin^2 75^0}{\sin 270^0} = \frac{cos\, 150^0}{\sin\frac{3\pi}{2}} =$

$$= \frac{cos\left(\frac{\pi}{2} + 60^0\right)}{\sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{-\sin 60^0}{-1} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1.19 – чийме). Мында $cos^2\alpha - sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ жана келтирүүнүн $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$ формулалары колдонулду. Туура жообу (а). ◄



1.20-чийме

6 – МИСАЛ : $\frac{\cos 55^0 \cos 35^0 - cos^2 10^0}{\cos 180^0}$ эсептегиле.

Жооптор . (а) $-\frac{1}{2}$; (б) -2;

(в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (д) $\frac{1}{2}$.

►ЭСЕПТӨӨ. $\frac{\cos 55^0 \cos 35^0 - cos^2 10^0}{\cos 180^0} =$

$$= \frac{\frac{\cos(55^0+35^0) + \cos(55^0 - 35^0)}{2} - \frac{1+\cos 20^0}{2}}{\cos \pi} =$$

$$= \frac{\frac{\cos 90^0 + \cos 20^0}{2} - \frac{1+\cos 20^0}{2}}{-1} = -\frac{\cos 20^0}{2} + \frac{1+\cos 20^0}{2} = \frac{-\cos 20^0 + 1 + \cos 20^0}{2} =$$

$\frac{1}{2}$ келип чыгат (1.20 – чийме) .

Мында $\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$, $cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ формулаларын пайдаландык. Туура жообу (в) . ◄

2.Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө.

7 – МИСАЛ : $\frac{\sin 2\alpha}{1 - cos^2\alpha}$.

Жооптор . (а)$tg\alpha$; (б)$2\, ctg\, \alpha$; (в)$tg\, 2\alpha$; (г)$2\, tg\, \alpha$; (д) $-2\cos\alpha$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ. $\frac{\sin 2\alpha}{1 - cos^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{sin^2\alpha} = 2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2ctg\, \alpha.$

Мында $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ формулалары пайдаланылды. Туура жообу (б). ◄

8 – МИСАЛ : $sin^4\alpha - cos^4\alpha + 2cos^2\alpha.$

Жооптор . (а) $\cos 2\alpha$; (б) $\cos\alpha$; (в) -1; (г)1; (д) $\sin 2\alpha$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ.

$$sin^4\alpha - cos^4\alpha + 2cos^2\alpha = (sin^2\alpha - cos^2\alpha)(sin^2\alpha + cos^2\alpha) +$$

$+ 2cos^2\alpha = (sin^2\alpha - cos^2\alpha) \cdot 1 + 2cos^2\alpha = sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ көрүнүшүнө келет. Мында $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$ ажыратуу формуласы колдонулду. Туура жообу (г). ◄

9 – МИСАЛ : $\frac{1}{1+ tg^2\alpha} + \frac{1}{1+ctg^2\alpha}$.

Жооптор . (а) $\cos\alpha$; (б) $\sin\alpha$; (в) $\cos 2\alpha$; (г) $-\cos 2\alpha$; (д) 1 .

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ.

$$\frac{1}{1 + tg^2\alpha} + \frac{1}{1 + ctg^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} + \frac{1}{1 + \frac{cos^2\alpha}{sin^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{cos^2\alpha + sin^2\alpha}{cos^2\alpha}} +$$

$$+ \frac{1}{\frac{sin^2\alpha + cos^2\alpha}{sin^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2\alpha}} + \frac{1}{\frac{1}{sin^2\alpha}} = sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$ көрүнүшүнө жөнөкөйлөйт.

Туура жообу (д). ◄

10 – МИСАЛ : $\sin(\pi - 3\alpha)\cos\alpha + \cos 3\alpha \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Жооптор . (а) $\sin 2\alpha$; (б) $\sin 4\alpha$; (в) $\cos 4\alpha$; (г) $\cos 2\alpha$;

(д) $-\cos 2\alpha$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ.

$$\sin(\pi - 3\alpha)\cos\alpha + \cos 3\alpha \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) =$$

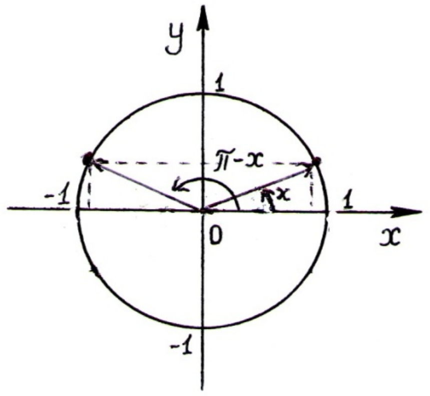
$$= [\sin\pi \cdot \cos 3\alpha - \cos\pi \cdot \sin 3\alpha]\cos\alpha +$$

$$+ \cos 3\alpha \left[\cos\frac{3\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sin\frac{3\pi}{2}\right] =$$

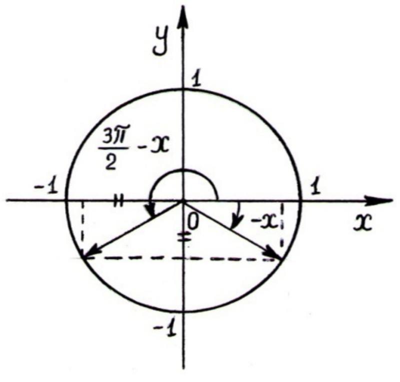
$$= [0 \cdot \cos 3\alpha - (-1) \cdot \sin 3\alpha]\cos\alpha +$$

$$+ \cos 3\alpha\,[0 \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot (-1)] = \sin 3\alpha \cos\alpha - \cos 3\alpha \sin\alpha =$$

$= \sin(3\alpha - \alpha) = \sin 2\alpha$. Мында келтирүүнүн $\sin(\pi - x) = \sin x$ (ординаталары тең); $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$ (абсцисса менен ордината тең) даяр формулалары колдонулбастан (1.21 – чиймелер), алардын келип чыгуусун көрсөткөн



1.21-чийме



1.22-чийме

$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$ менен $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$ формулалары колдонулду.

Туура жообу (а). ◄

11 – МИСАЛ : $\frac{1 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{1 - \cos^2\alpha}$.

Жооптор . (а) $-tg\, 2\alpha$; (б) $tg\, 2\alpha$; (в) $-c\,tg\, 2\alpha$; (г) с$tg\, 2\alpha$; (д) $\sin 2\alpha$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ.

$$\frac{1 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{1 - 2\cos^2\alpha} = \frac{1 - [\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha]}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha}{-(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} =$$

$= \frac{1 - 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}{-\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{-\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha} = -tg\, 2\alpha$ жообу келип чыгат. Мында тригонометриялык$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; алгебралык $(m - n)^2 = m^2 - 2mn + m^2$

формулалары колдонулду. Туура жообу (а).◄

12 – МИСАЛ : $\frac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \frac{2 - \cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Жооптор . (а) $-6\,tg\,2\alpha$; (б) $6\,ctg\,2\alpha$; (в) $-\frac{3}{2}tg\,2\alpha$; (г) $\frac{3}{2}tg\,2\alpha$;

(д) $3\,tg\,2\alpha$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ.

$$\frac{\operatorname{Cos}\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \frac{2-\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha - 2\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \frac{2-\cos^2\alpha}{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha - 2\sin\alpha) - 2 + \cos^2\alpha}{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha + 2\sin^2\alpha - 2 + \cos^2\alpha}{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 3\cos\alpha\sin\alpha - 2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 3\cos\alpha\sin\alpha - 2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{2-3\cos\alpha\sin\alpha - 2}{\cos 2\alpha} = \frac{-3\cos\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha} = -3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{3}{2}tg\,2\alpha.$$

Мында $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$ формулалары колдонулду.

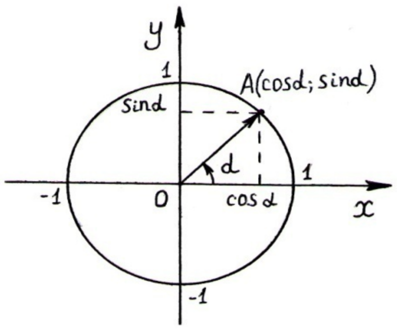
Туура жообу $-\frac{3}{2}tg\,2\alpha$, же (в). ◄

3.Туюнтмалардын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

13 – МИСАЛ : $2 - 3\sin^2\alpha$.

Жооптор . (а) $4, -2$; (б) $5, -1$; (в) $2, -1$; (г) $1, -5$; (д) $2, -4$.

►ТАБУУ. Тригонометриялык функцияларды түзүүнүн табияты боюнча $\sin\alpha$ деп, борбору O чекитинде болгон бирдик айлананын α борбордук бурчуна туура келген **A** чекитинин абсциссасы, ал эми $\cos\alpha$ деп A чекитинин ординатасы белгиленген. Бирдик айланага таандык чекиттердин координаталары 1 ден кичине бөлчөк сандар болгондуктан, аларды цифралар менен жазуу ыңгайсыздыкты жаратып (1.23– чийме), аларды белгилөө үчүн тригонометриялык сандар (функциялар) аппараты түзүлгөн (§2.19 – кара).



1.23-чийме

А чекити бирдик айланада жаткандыктан анын $\mathrm{A}(\cos\alpha\,; \sin\alpha)$ координаталары, б.а. абсциссасы $|\cos\alpha| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1;$ ординатасы $|\sin\alpha| \leq 1 \quad \Leftrightarrow -1 \leq \sin\alpha \leq 1$ аралыктарында чектелген сандар болушат.

$2 - 3\sin^2\alpha$ туюнтмасында бирден кичине сандын квадраты катарында, биринчиден $\sin^2\alpha \leq 1$; экинчиден $\sin^2\alpha \geq 0$ шарттарына баш ийет. Демек,$\{3\sin^2\alpha\}$ маанилери $3 \cdot 0 = 0 \leq 3\sin^2\alpha \leq 3 \cdot 1 = 3$ аралыгында чектелген болот. Ошондуктан берилген туюнтма, 2 ден $3 \cdot 0 = 0$ санын кемиткенде эң чоң 2 деген маанини, ал эми 2 ден $3 \cdot 1 = 3$ санын кемиткенде “-1” деген эң кичине маанини кабыл алат.

Туура жообу (в) $2, -1$. ◄

14 – МИСАЛ : $sin^2\alpha + 2cos^2\alpha.$

Жооптор . (а) $1,\ 0$; (б) $2,\ 1$; (в) $2, -1$; (г) $-1, -2$; (д) $0, -2$.

►ТАБУУ.$sin^2\alpha + 2cos^2\alpha = \underbrace{sin^2\alpha + cos^2\alpha}_{1} + cos^2\alpha = 1 + cos^2\alpha$

көрүнүшүнө жөнөкөйлөтсөк $0 \leq cos^2\alpha \leq 1$ болгондуктан, $1 + cos^2\alpha$ туюнтмасынын эң чоң мааниси $1 + 1 = 2$ саны, ал эми эң кичине мааниси $1 + 0 = 0$ саны болот.

Туура жообу (б) $2,\ 1$. ◄

15 – МИСАЛ : $3\,cos^2\alpha - tg\alpha\ \cdot ctg\ \alpha.$

Жооптор . (а) $3,\ 0$; (б) $0, -3$; (в) $2,\ 1$; (г)$2, -1$; (д) эң чоң, кичине маанилери жашабайт.

►ТАБУУ.

$$3\,cos^2\alpha - tg\ \alpha\ \cdot ctg\ \alpha = 3\,cos^2\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 3\,cos^2\alpha - 1$$

көрүнүшүнө жөнөкөйлөтүп, $0 \leq 3cos^2\alpha \leq 3$ аралыгында чектелерин эске алсак, анда $3\,cos^2\alpha - 1$ туюнтмасынын эң чоң мааниси $3\ - 1 = 2$ саны, ал эми эң кичине мааниси $3\ \cdot 0 - 1 = -1$ саны болору келип чыгат. Туура жообу (г) $2, -1$. ◄

4.Туюнтмалардын маанилерин тапкыла.

16 – МИСАЛ : Эгерде $tg\,\alpha = -2$ болсо, $\frac{\sin\alpha - 3\ \cos\alpha}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha}$ туюнтмасынын.

Жооптор . (а) $-\frac{7}{8}$; (б) -3; (в) $\frac{2}{3}$; (г) -5; (д) $\frac{7}{8}$.

►ТАБУУ.

$\frac{\sin\alpha - 3\ \cos\alpha}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 3\right)\cdot\cos\alpha}{\left(2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 5\right)\cdot\cos\alpha} = \frac{tg\,\alpha - 3}{2\,tg\,\alpha + 5} = \frac{-2-3}{2(-2)\ + 5} = \frac{-5}{1} = -5$ жообуна ээ болобуз. Туура жообу (г) -5 . ◄

17 – МИСАЛ : Эгерде $\cos 51^0\ -\ \cos\alpha = 2\sin 17^0 \cdot \sin 68^0$ жана $0^0 < \alpha < 90^0$ экендиги белгилүү болсо, анда α ны тапкыла.

Жооптор . (а)85^0 ; (б) -85^0; (в)136^0; (г)34^0; (д)119^0 .

►ТАБУУ.

Теңдештиктин оң жагын $2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ формуласын пайдаланып,

$$2\sin 17^0 \cdot \sin 68^0 = \cos(17^0 - 68^0) - \cos(17^0 + 68^0) =$$

$= \cos(-51^0) - \cos 85^0 = \cos 51^0 - \cos 85^0$ көрүнүшүнө келтиребиз. Анда теңдештик

$\cos 51^0\ -\ \cos\alpha = \cos 51^0 - \cos 85^0\ \Leftrightarrow\ -\ \cos\alpha = -\cos 85^0 \Leftrightarrow$ $\cos\alpha = \cos 85^0$ абалына келет. Мындан $\alpha = 85^0$ болору келип чыгат. Туура жообу (а)85^0. ◄

§1.7 Тригонометриялык теңдемелерди чыгаруу

1. Теңдемелерди чыгаргыла.

1 – МИСАЛ : $2\sin x + 1 = 0$.

Жооптор. а) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$; б)$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$;

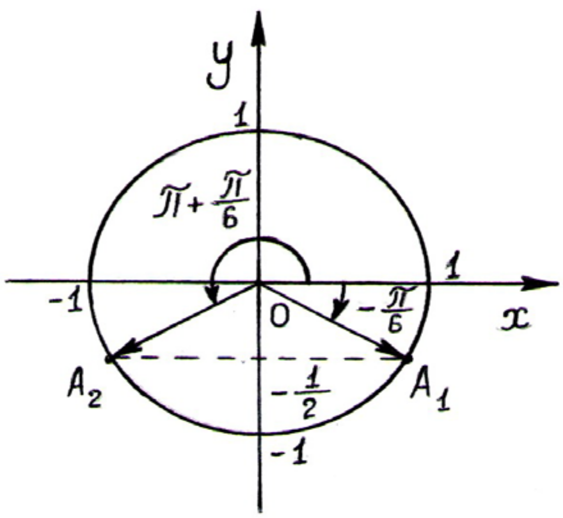
в) $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z$; г) $\pm\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z$;

д) $(-1)^k \dfrac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z$.

► ЧЫГАРУУ. $(-\infty, +\infty)$ сан огундагы бардык чекиттердин синусун эсептөөгө мүмкүн болгондуктан, теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

Берилген теңдемени

$2\sin x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x = -1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = -\frac{1}{2}$ көрүнүшүнө келтирсек, анда бирдик айланада ординатасы “$-\frac{1}{2}$” ге тең болгон эки A_1, A_2 чекиттери бар жана алар $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ бурчтарына туура келишет (1.24 – чийме). Иш жүзүндө A_1, A_2 чекиттерине мындай бурчтардын чексиз көбү туура келиши мүмкүн, анткени k деп О чекитин айлануулардын санын белгилесек : $k = 0$ болгондо жогорудагы x_1, x_2 бурчтары; $k = 1$ десек оң багыт боюнча координаттык тегиздикти толук бир жолу айланып келген $x_1 + 2\pi$, $x_2 + 2\pi$ бурчтары; $k = -1$ десек терс багыт боюнча координаттык тегиздикти толук бир жолу айланып келген $x_1 - 2\pi$, $x_2 - 2\pi$ бурчтары ж.б.у.с. туура келип олтурат. Ошентип теңдеменин бардык чечимдерин калтырбай жазуу



1.24-чийме

үчүн айланууларды санын эске алган жалпы учурду кароо керек. Мындай жалпы учурду

$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$ көрүнүшүндө жазабыз. Аны $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ маанилерин берип текшерип көрүүгө болот. Туура жообу $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$ (б). ◄

2 – МИСАЛ : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Жооптор. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$; в) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$;

г) $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in Z$; д) $(-1)^k\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z$.

► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

Берилген $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ теңдеме, бирдик айланада ординатасы тең болгон А чекиттерин табуу менен чечилет. Анда $\frac{\pi}{2} - x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$ (k айлануулардын саны) келип чыгат. Мындан $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 2k\pi,\ k \in Z$ же $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$ жообуна ээ болобуз. Оң жана терс багыттар боюнча бирдей айлануу укугу

$k = 0, \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$ берилгендиктен "$\pm$" белгилери коюлат.

Туура жообу (б) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$. ◄

3 – МИСАЛ : $\sqrt{3}tg\ 2x + 1 = 0$.

Жооптор. а) $-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$; б) $-\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$;

в) $-\dfrac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in Z$; г) $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in Z$; д) $\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi,$ $k \in Z$.

► ЧЫГАРУУ.

Теңдеменин ЧЖА сы сан огундага $2x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$же $x \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in Z$ чекиттеринен башка бардык чекиттер кирет.

Теңдемеден $\sqrt{3}tg\ 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\ 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ келип чыгып,

$2x = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + k\pi,\ k \in Z \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z \Rightarrow\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k,$ $k \in Z$ жообу табылат. Табылган чечимдер ЧЖА га кирет. Мында k саны айланууну көрсөтпөстөн, $0x$ огу боюнча $k\pi$ аралыгына которулууну түшүндүрөт (1.11 – чиймени кара).

Туура жообу (а) $-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$.◄

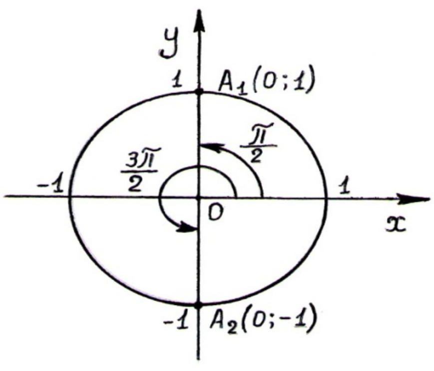
4 – МИСАЛ : $2cos^2x - 7\cos x = 0.$

Жооптор. а) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$; б) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \pm\arccos\frac{7}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$;

в)$k\pi, \quad k \in Z$; г) $\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$; д) $2k\pi, \quad k \in Z$.

► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу.

Теңдемени $2cos^2x - 7\cos x = 0 \Rightarrow \cos x \cdot (2\cos x - 7) = 0$ көрүнүшүнө келтирип, эки сандын көбөйтүндүсүнүн нөлгө тең болушу үчүн, алардын бирөөсүнүн нөлгө тең болушу жетиштүү экендигин эске алып : 1)$\cos x = 0$ абсциссасы нөлгө тең болгон бирдик айлананын чекитин табуу керек. Мындай чекиттер экөө $A_1(0;\ 1)$, $A_2(0;\ -1)$. Алар тиешелүү түрдө $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ бурчтарына туура келет (1.25 – чийме). Бул бурчтар бири – биринен π бурчуна айырмаланып турушкандыктан, k жолу айланууда эки чечимди тең таштабай көрсөтүү үчүн, жалпы учурда эки чечимди бириктирип



1.25-чийме

$x = \arccos 0 + k\pi = \frac{\pi}{2} +\ k\pi,\ k \in Z$ көрүнүшүндө жазууга болот.

2) $2\cos x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{7}{2} = 3{,}5 > 1.$

Бирок бирдик айланага таандык чекиттин абциссасы катарында $|\cos x| \leq 1$ болушу керек. Демек, $\forall x: 2\cos x - 7 \neq 0.$

Анда туура жообу (г) $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$ ◄

5 – МИСАЛ : $2sin^2x - 3\sin x + 1 = 0.$

Жооптор. а) $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$; б) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\quad k \in Z$; в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$ $k \in Z$; г) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$; д) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

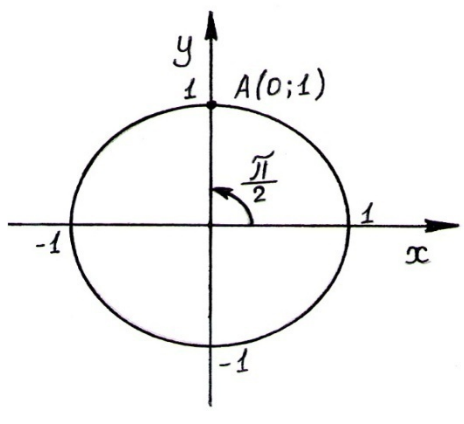
► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу.

Теңдемеге $\mathrm{y} = \sin x$ белгилөөсүн киргизсек, анда $|\sin x| \leq 1$ чектелгендиктен у ке$|\mathrm{y}| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \mathrm{y} \leq 1$ шарты коюлат. Берилген теңдеме белгилөөдөн кийин$2\mathrm{y}^2 - 3\mathrm{y} + 1 = 0$ квадраттык теңдемесине келтирилет. Анын чечимдерин

$$\mathrm{y}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$
$$= \frac{3 \pm 1}{4},$$

$\mathrm{y}_1 = \frac{3+1}{4} = 1$ жана $\mathrm{y}_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ таап, экөөсүнүн тең 1ден кичине же барабар болорун көрөбүз.

1) $\sin x = 1$⇨ Бирдик айланада ординатасы 1 ге барабар болгон бир гана A(0; 1) чекити бар болуп (1.26 – чийме), ал $x = \frac{\pi}{2}$ бурчуна туура келет. k жолу толук айлануупарын эске алып, чечимди $x = \arcsin 1 + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$ көрүнүшүндө жазабыз.



1.26-чийме

2) $\sin x = \frac{1}{2}$⇨ Бирдик айланада ординатасы $\frac{1}{2}$ге барабар болгон эки A_1, A_2чекиттери бар (1.27 – чийме), алар $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ бурчтарына туура келет. k жолу толук айланууларды эске алып, эки чечим тең ташталбагандай жалпылап $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\quad k \in Z$ көрүнүшүндө жазабыз.

Эки учурда табылган чечимдерди бириктирип, теңдеме $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi, \quad k\in Z$ чечимдерине ээ болот деген жыйынтыкка келебиз. Туура жообу (д). ◄

6 – МИСАЛ : $\cos 2x + 8\sin x = 3$.

Жооптор. а) $\pm\arccos\left(2-\sqrt{3}\right)+2\,k\pi,\ k\in Z$;

б) $\arcsin\left(2+\sqrt{3}\right)+2k\pi, \quad k\in Z$; в) $2k\pi$, $k\in Z$; г) $(-1)^k\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+k\pi$, $k\in Z$; д) $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

Берилген теңдемени

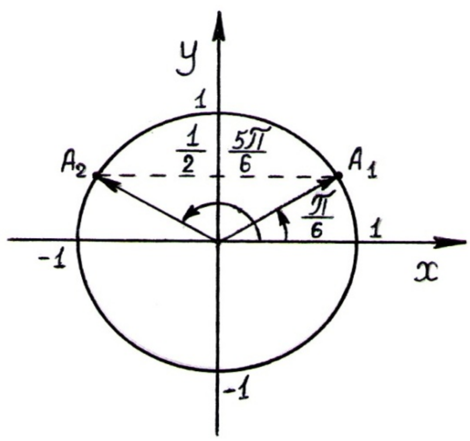
$\cos 2x + 8\sin x = 3 \Rightarrow \ cos^2x-\sin^2 x+8\sin x = 3 \Rightarrow$

$1-\sin^2 x-\sin^2 x+8\sin x=3 \Rightarrow \ -2\sin^2 x+8\sin x-2=0$ же нөлдөн айырмалуу (-2) ге бөлүп жиберип, $\sin^2 x+4\sin x-1=0$ көрүнүшүнө келтиребиз.

$y=\sin x$ белгилөөсүн киргизип ($|y|\le 1 \ \Leftrightarrow\ -1\le y\le 1$),

$y^2-4y-1=0$ квадраттык теңдемесинин

$$y_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}=-(-2)\ \pm\ \sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}=2\ \pm\ \sqrt{3},$$



1.27-чийме

$y_1=2+\sqrt{3}$ жана $y_2=2-\sqrt{3}$ чечимдерин табабыз. $y_1>1$ болгондуктан, белгилөөнүн шартына баш ийбейт. Ошондуктан аны таштап жиберип,

$y_2=\sin x \quad\Rightarrow\quad \sin x=2-\sqrt{3}$ же бирдик айлананын ординатасы $2-\sqrt{3}$ болгон чекиттерин издейбиз. Мындай чекиттер экөө болгондуктан, аларга туура келген борбордук x чечимдерин (бурчтарын)

$x = (-1)^k \arcsin(2-\sqrt{3}) + k\pi,\ k \in Z$ көрүнүшүндө жазабыз. Туура жообу (г). ◀

7 – МИСАЛ : $\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1$.

Жооптор. а) $\pi + 2\,k\pi,\ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$; б) $2k\pi,\ k \in Z$;

в) $2k\pi, (-1)^k \dfrac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in Z$; г) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$;

д) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$.

► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

Берилген теңдемени тригонометриялык формулаларды колдонуп,

$$\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1 \ \Rightarrow\ 2\sin x\cos x + 2\sin x = \cos x + 1$$

же $2\sin x(\cos x + 1) = \cos x + 1 \Rightarrow$

$$2\sin x(\cos x + 1) - (\cos x + 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$(2\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп жазалы.

Эки сандын көбөйтүндүсү нөлгө тең болушу үчүн, алардын жок дегенде бирөөсүнүн нөлгө тең болушу жетиштүү:

1) $2\sin x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \sin x = \frac{1}{2}$ ⇨ Бирдик айланада ординатасы $\frac{1}{2}$ ге тең болгон чекиттер экөө (1.27 – чийме), алар $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ бурчтарына туура келишет. Экөөсүн тең таштабай жазуу үчүн, чечимдерди

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + k\pi = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z \text{ көрүнүшүндө жазабыз.}$$

2) $\cos x + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \cos x = -1$, б.а. бирдик айланада абциссасы (-1) болгон чекитти табуу керек. Мындай чекит бирөө гана жана ал $x = \pi$ бурчу болот. k толук айлануулларын эске алып, аны $x = \arccos(-1) + 2k\pi = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$ деп жазууга болот.

Эки учурду бириктирип, теңдеменин туура чечимин $(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$, $\pi + 2k\pi,\ k \in Z$ же (а) табабыз. ◀

8 – МИСАЛ : $\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3cos^2 x$.

Жooптор. а) $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$; б) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$; в) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$; г) $-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ arctg\, 3\ + k\pi,\ k \in Z$; д) $2k\pi,\ k \in Z$.

► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

Берилген теңдеменин эки жагын тең $cos^2 x \neq 0\ \Leftrightarrow\ \cos x \neq 0\ \Leftrightarrow$ бирдик айланада абциссасы нөлгө тең болгон эки чекит бар, алар $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ бурчтарына туура келишет.

Жалпылаганда $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ деп алып, теңдемени $cos^2 x$ туюнтмасына бөлүп жиберсек, анда

$\frac{\sin^2 x}{cos^2 x} - \frac{2\sin x\cos x}{cos^2 x} = \frac{3cos^2 x}{cos^2 x}$ келип чыгып, $tg^2 x - 2tg\ x = 3$ же $y = tg\ x$ белгилөөсүн киргизсек, $y^2 - 2y - 3 = 0$ квадраттык теңдемесине ээ болобуз. Анын чечимдерин

$$y_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1\cdot(-3)} = 1 \pm \sqrt{4} =$$

$= 1 \pm 2, y_1 = 1 + 2 = 3$жана $y_2 = 1 - 2 = -1$ табабыз. Мындан берилген теңдеменин чечимдери

1) $tg\ x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = arctg\, 3\ + k\pi,\ k \in Z$;

2) $tg\ x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$ көрүнүштөрүндө табылат. Эки учурда тең табылган чечимдер ЧЖА га кирип, кошумча коюлган $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ шарттарга баш ийишет.

Мында k саны айланууну көрсөтпөстөн, $0x$ огу боюнча $k\pi$ аралыгына которулууну түшүндүрөт (1.11 – чиймени кара).

Туура жообу (г) $-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ arctg\, 3\ + k\pi,\ k \in Z$. ◄

9 – МИСАЛ : $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Жооптор. а) $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$; б) $\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$; в) $2k\pi$, $k\in Z$; г) $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \pm\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$;

$$\text{д)}\quad (-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi,\ \ k\in Z\,.$$

► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

Теңдемедеги биринчи жана үчүнчү кошулуучуларды көбөйтүндүгө өзгөртүп,

$$\cos x+\cos 3x=2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=2\cos 3x\cos\frac{-2x}{2}=$$

$=2\cos 2x\cos(-x)=\ 2\cos 2x\cos x$, берилген теңдемени

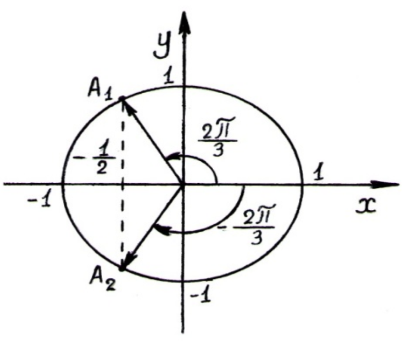
$2\cos 2x\cos x\ +\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x\cdot(2\cos x+1)=0$

көрүнүшүнө келтиребиз.

Эки сандын көбөйтүндүсү нөлгө тең болушу үчүн, алардын биринин нөлгө тең болушу жетиштүү:

1) $\cos 2x=0$ теңдемесинин чечими бирдик айланадагы абциссасы нөлгө тең болгон чекиттерге туура келген $2x=\pm\frac{\pi}{2}$ бурчтары болот. Анда анын чечимдери k жолку толук айлануулардын эске алганда

$2x=\pm\frac{\pi}{2}+\ k\pi \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{4}+\ k\frac{\pi}{2},\ \ k\in Z$ бурчтары болушат.



1.28-чийме

2) $2\cos x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x=-\frac{1}{2}$ же бирдик айланага таандык, абциссасы $\left(-\frac{1}{2}\right)$ болгон чекитке туура келген x бурчун аныктоо керек (1.28 – чийме). Мындай бурчтар

$$x=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2k\pi=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,$$

$k\in Z$ болушат.Эки учурду бириктирип, теңдеменин туура жообун (б) $\pm\frac{\pi}{4}+\ k\frac{\pi}{2},\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$ көрүнүшүндө жазабыз. ◄

10 – МИСАЛ : $\sin x = 1 + \frac{1}{x^2+1}$.

Жооптор. а) x каалагандай сан; б) $\frac{1}{2}$; в) 0 ; г) -1 ;

д) чечими жок .

► ЧЫГАРУУ. Теңдемени түзгөн теңдештиктин оң жагында турган $1 + \frac{1}{x^2+1}$ саны x тин каалагандай маанисинде оң жана бирден чоң сан болот. Ал эми сол жагындагы $\sin x$ деп, борбордук x бурчуна туура келген бирдик айланада жаткан чекиттин ординатасы белгиленгендиктен, ал бирден ашып кете албайт. Ошондуктан теңдеме туура эмес түзүлүп,анын чечимдери $\{\emptyset\}$ −бош көптүк болот же жашабайт.

Туура жообу (д). ◄

2. Теңдемелердин берилген кесиндилерге таандык чечимдерин тапкыла.

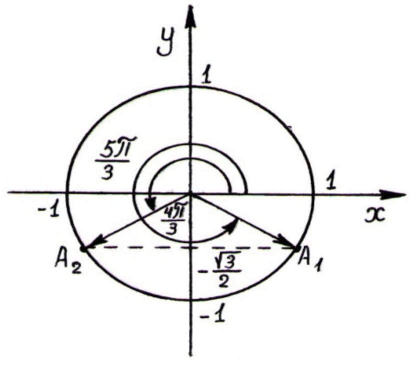
11 – МИСАЛ : $2\sin x + \sqrt{3} = 0$теңдемесинин $[0,\ 2\pi]$ кесиндисиндеги чечимдерин.

Жооптор. а) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$; г) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$;

д) $-\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$.

► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болуп, көрсөтүлгөн аралык ЧЖА га кирет.

Берилген теңдемени $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ көрүнүшүнө келтирип, бирдик айланада ординатасы $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ саны болгон чекитке туура келген борбордук x бурчун издейбиз. Көрсөтүлгөн аралыкта мындай чекиттер экөө, аларга $x_1 = \frac{4\pi}{3}$,$x_2 = \frac{5\pi}{3}$ бурчтары туура келет (1.29 – чийме). Туура жообу а) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. ◄



1.29-чийме

12 – МИСАЛ : $(\sin x+1)^2=\sin^2 x+1$ теңдемесинин $[0,\ 2\pi]$ кесиндисиндеги чечимдерин.

Жооптор. а) $0,\ \pi$; б) $0,\ \pi,\ 2\pi$; в) $\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$; г) $-\pi,\ 0$;

д) $-\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}$.

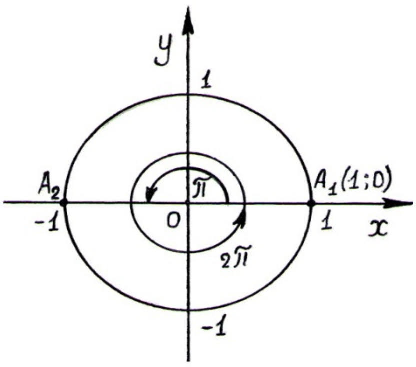
► ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болуп, көрсөтүлгөн аралык ЧЖА га кирет.

Теңдемени

$$(\sin x+1)^2=\sin^2 x+1 \ \Leftrightarrow\ \sin^2 x+2\sin x+1=\sin^2 x+1 \ \Leftrightarrow$$

$2\sin x=0 \ \Leftrightarrow\ \sin x=0$ көрүнүшүнө өзгөртсөк, анда анын чечими бирдик айланадагы ординатасы 0 болгон чекиттерге туура келүүчү x бурчтары болорун көрөбүз. Бирдик айланада мындай эки $\mathrm{A}_1(1,\ 0)$, $\mathrm{A}_2(-1,\ 0)$ чекиттер болуп, алар $[0,\ 2\pi]$ аралыгындагы$x_1=0,\ x_2=\pi$, $x_2=2\pi$бурчтарына туура келишет (1.30 – чийме). Туура жообу б) $0,\ \pi$, 2π. ◄

13 – МИСАЛ : $tg^2 x-\sqrt{3}\,tg\,x=0$ теңдемесинин $[0,\ 2\pi]$ кесиндисиндеги чечимдерин.



1.30-чийме

Жооптор. а) $\frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$; б) $0,\ \pi$; в) $\pi, 2\pi$; г) $0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3},\ 2\pi$;

д) $0,\quad \dfrac{\pi}{6},\quad \pi,\quad \dfrac{7\pi}{6}$.

►ЧЫГАРУУ. $tg\ x=\frac{\sin x}{\cos x}$ болгондуктан теңдеменин ЧЖА сы, бөлчөктүн бөлүмү нөлгө тең болбогон $\cos x\neq 0$ же $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ чекиттерден башка сан огундагы бардык чекиттер болушат. Мында k саны айланууну көрсөтпөстөн, $0x$ огу боюнча $k\pi$ аралыгына которулууну түшүндүрөт (1.11 – чиймени кара же §2.19 ду оку).

Берилген теңдемени $tg^2x - \sqrt{3}\, tg\, x = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; tg\, x(tg\, x - \sqrt{3}) = 0$ көрүнүшүнө келтирип, эки сандын көбөйтүндүсү жок дегенде бирөөсү нөлгө тең болсо эле, нөлгө тең болорун эске алабыз.

Анда 1) $tg\, x = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = arctg\, 0 + k\pi = 0 + k\pi = k\pi, k \in Z$ чечимдери табылып, $k = 0$, 1 , 2 болгон учурдагы $x = 0,\; x = \pi,$

$x = 2\pi$ бурчтары көрсөтүлгөн аралыкка таандык болушат.

2) $tg\, x - \sqrt{3} = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; tg\, x = \sqrt{3} \;\; \Rightarrow x = arctg\, \sqrt{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + k\pi,$

$k \in Z$ чечимдери табылып, $k = 0$, 1 учурдагы которууларга туура келген $x = \frac{\pi}{3},\; x = \frac{4\pi}{3}$ бурчтары, теңдеменин шартында көрсөтүлгөн аралыкка таандык болот.

Эки учурда табылган чечимдер ЧЖА га киргендиктен, туура жооп алардын биригүүсү болот г) 0, $\frac{\pi}{3},\; \pi,\; \frac{4\pi}{3},\; 2\pi$. ◄

14 – МИСАЛ : $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ теңдемесинин $[\pi,\; 3\pi]$ кесиндисиндеги чечимдерин.

Жооптор. а) $\frac{\pi}{3},\; \frac{4\pi}{3}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{6},\; \frac{7\pi}{6}$; г) $\frac{4\pi}{3},\; \frac{7\pi}{3}$; д) $\frac{7\pi}{6},\; \frac{13\pi}{6}$.

►ЧЫГАРУУ. Теңдемеде $\cos x \neq 0$ же $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\; k \in Z$ деп эсептеп, анын эки жагын тең $\cos x$ туюнтмасына бөлүп,

$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \;\;\; \Rightarrow \;\;\; tg\, x = \sqrt{3}$ теңдемесин алабыз. Анда

$tg\, x = \sqrt{3} \;\; \Rightarrow x = arctg\, \sqrt{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + k\pi,\; k \in Z$ чечимдери табылып, $k = 1$, 2 учурдагы которууларга туура келген $x = \frac{4\pi}{3},\; x = \frac{7\pi}{3}$ бурчтары, теңдеменин шартында көрсөтүлгөн аралыкка таандык болот. Туура жообу г) $\frac{4\pi}{3},\; \frac{7\pi}{3}$. ◄

15 – МИСАЛ : $\frac{2\cos x + \sin x}{\cos x - 7\sin x} = -\frac{1}{2}$ теңдемесинин $[-\pi,\; \pi]$ кесиндисиндеги чечимдерин.

Жооптор. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{3\pi}{4},\; -\frac{\pi}{4}$; д) $-\frac{3\pi}{4},\; \frac{\pi}{4}$.

►ЧЫГАРУУ. $\mathrm{Cos}\, x \neq 0$ же $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ деп эсептеп, теңдеменин сол жагындагы бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн $\cos x$ ке бөлүп

$$\frac{\frac{2\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x - 7\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{2\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{7\sin x}{\cos x}} = \frac{2 + tg\, x}{1 - 7tg\, x},$$

теңдемени $\frac{2 + tg\, x}{1 - 7tg\, x} = -\frac{1}{2}$ көрүнүшүндө жазалы. Мындан $у = tg\, x$ белгилөөсүн киргизип,

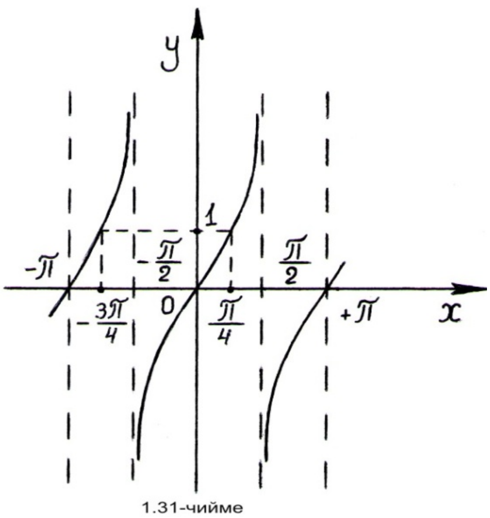
$\frac{2 + у}{1 - 7у} = -\frac{1}{2}$ көрүнүшүндөгү бөлчөк теңдемесине ээ болобуз. Бөлчөктүн бөлүмү катарында у ке кошумча $1 - 7у \neq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; у \neq \frac{1}{7}$ шарты коюлат. Анда

$\frac{2 + у}{1 - 7у} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2 + у}{1 - 7у} + \frac{1}{2} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{(2 + у)\cdot 2 + 1\cdot(1 - 7у)}{(1 - 7у)\cdot 2} = 0 \Rightarrow \frac{-5у + 5}{(1 - 7у)\cdot 2} = 0$ келип чыгып, бөлчөк нөлгө тең болушу үчүн анын алымынын нөлгө тең болушу жетиштүү болгондуктан, $-5у + 5 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; у = 1$ чечими табылып,ал кошумча шарткабаш ийет.

Белгилөөгө кайрылып,

$$у = tg\, x \;\; \Rightarrow \;\; tg\, x = 1 \;\; \Rightarrow \;\; x = arctg\, 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in Z$$

берилген теңдеменин чечимдерин табабыз. Алардын көрсөтүлгөн аралыкка таандык болгондору же туура жооп $k = -1,\ 0$ учурларына тиешелүү болгон д) $-\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}$ бурчтары болушат (1.31 – чийме). ◄



1.31-чийме

3. Теңдемелердин эң кичине оң тамырларын тапкыла.

16 – МИСАЛ : $\frac{\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x}{\cos\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ теңдемесинин.

Жооптор.

а) $\frac{5\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{4}$; в) $\frac{13\pi}{12}$; г) $\frac{19\pi}{12}$; д) $\frac{\pi}{4}$.

►ЧЫГАРУУ. Теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

Теңдеменин сол жагынын алымын, эки бурчтун суммасынын синусунун формуласы боюнча $\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ көрүнүшүнө келтирип, теңдемени

$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\cos\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп жазабыз. Анда бирдик айланада ординатасы “$-\frac{\sqrt{2}}{2}$” санына барабар болгон чекитке тиешелүү $\frac{\pi}{6}+x$ бурчу, теңдемеге тамыр (чечим) болот. Мындай чекиттер экөө болгондуктан, бурчтар же чечимдер да экөө болуп, жалпы учурда

$\frac{\pi}{6}+x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi, k \in Z \quad ⇨ \quad \frac{\pi}{6}+x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi,$ $k \in Z$ же $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$ көрүнүшүндө жазылат. Эң кичине оң чечим $k = 1$ болгон (биринчи айлампа) учурда табылып, $x = (-1)^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 1 \cdot \pi = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ бурчу, табууну талап кылган эң кичине оң тамыр (чечим) болот. Туура жообу в) $\frac{13\pi}{12}$. ◄

17 – МИСАЛ : $\sin^2 x = cos^2 x$ теңдемесинин.

Жooптор. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{2}$.

►ЧЫГАРУУ. $cos^2 x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \cos x \neq 0$ же $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ деп эсептеп, теңдеменин эки жагын тең $cos^2 x$ туюнтмасына бөлүп жиберип, $\frac{\sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x}{cos^2 x} \;\Leftrightarrow tg^2 x = 1$ теңдемесине ээ болобуз. Мындан $tg\, x = \pm\sqrt{1} \;\Leftrightarrow\; tg\, x = \pm 1$⇨

$x = arctg(\pm 1) + k\pi = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$ чечимдерин табабыз. Мындан эң кичине оң чечим $k = 0$ болгондо $x = \frac{\pi}{4}$ саны менен ченелген бурч болорун көрөбүз.

Туура жообу а) $\frac{\pi}{4}$.◄

18 – МИСАЛ : $4\sin 3x \sin x + 2\cos 2x + 1 = 0$ теңдемесинин.

Жooптор. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{5\pi}{6}$.

►ЧЫГАРУУ. Тригонометриялык формулалардын жардамы менен теңдемеде

$$2\sin 3x \sin x = \cos(3x - x) - \cos(3x + x) = \cos 2x - \cos 4x =$$

$$= \cos 2x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \cos 2x - \cos^2 2x + \sin^2 2x =$$

$= \cos 2x - \cos^2 2x + 1 - \cos^2 2x = \cos 2x - 2\cos^2 2x + 1$ өзгөртүүлөрүн жүргүзүп,

$$4\sin 3x \sin x + 2\cos 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$2(\cos 2x - 2\cos^2 2x + 1) + 2\cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

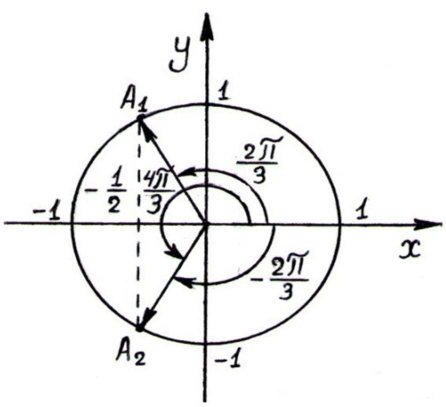
$-4\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0$ же (-1) ге көбөйтүп,

$4\cos^2 2x - 4\cos 2x - 3 = 0$ көрүнүшүндөгү тригонометриялык теңдемени алабыз.

Мындан $|y| \le 1$ шарты менен $y = \cos 2x$ белгилөөсүн киргизип, $4y^2 - 4y - 3 = 0$ теңдемесинин

$$y_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot(-3)}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{2 \pm 4}{4},$$

$y_1 = \frac{2+4}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ жана $y_2 = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2}$ чечимдерин табабыз. Чечимдердин биринчиси коюлган шартка баш ийбейт $y_1 = 1{,}5 > 1$. Ошондуктан $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ же бирдик айланада абсциссасы "$-\frac{1}{2}$" болгон чекиттерге тиешелеш коюлган, борбордук $2x$ бурчун табабыз (1.32 - чийме). Мындай чекиттер экөө, анда k жолку айлануулары эске алып



1.32-чийме

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \;\; 2x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \; k \in Z \Rightarrow$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$чечимдерин табабыз. Оң чечимдердин эң кичинеси $k = 0$ (алгачкы айлампа) болгондогу $x = \frac{\pi}{3}$ болорун көрөбүз. Туура жообу б) $\frac{\pi}{3}$. ◄

4. Тригонометриялык теңдемелер системаларын чыгаргыла

19 – МИСАЛ : $\begin{cases} y + \sin x = 5, \\ 4y + 2\sin x = 19 \end{cases}$ теңдемесин.

Жooптор. а) $\left(\frac{1}{2};\ \frac{9}{2}\right)$; б) $\left(\frac{9}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; в) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \frac{1}{2}\right),\ k \in Z$;

г) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \frac{9}{2}\right)\ k \in Z$; д) $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{9}{2}\right)\ k \in Z$.

►ЧЫГАРУУ. Системанын биринчи жолчосун (-4) көбөйтүп, экинчи жолчосуна кошолу

$$(-4y + 4y) + (-4\sin x + 2\sin x) = 5 \cdot (-4) + 19 \ \Rightarrow\ -2\sin x = -1$$

$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow\ x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$ (1.27 – чийме) чечимдерин

же системанын чечими болгон чекиттин абсциссасын таптык.

Биринчи жолчодо $\sin x$ тин ордуна табылган$\frac{1}{2}$ санын коюп

$y + \sin x = 5 \ \Rightarrow y + \frac{1}{2} = 5 \ \Rightarrow\ y = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, теңдемелер системасына чечим болгон чекиттин ординатасын табабыз. Анда системага координаталары $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \frac{9}{2}\right), k \in Z$ түгөй сандары болгон чекиттер чечим болушат. Чечимдер жайгашкан чекиттерде

$y = -\sin x + 5$ функциясынын графиги менен $y = -\frac{1}{2}\sin x + \frac{19}{2}$ функциясынын графиги кесилишет.

Туура жообу г) $\left((-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi;\ \frac{9}{2}\right)\ k \in Z$. ◄

5. Тригонометриялык барабарсыздыкты чыгаргыла.

20 – МИСАЛ : $\cos x \geq 1 + |x|$ барабарсыздыгын.

Жооптор. а)x каалаган сан ; б)$[0,+\infty)$; в) $(-\infty,\ 0]$; г) 0;

д) чыгарылышы жок .

►ЧЫГАРУУ. Сандын абсолюттук чоңдугунун аныктамасы боюнча барабарсыздыктын оң жагындагы туюнтма $\forall\, x$: $|x| \geq 0$ оң сан, ошондуктан $\forall\, x$: $1 + |x| \geq 1$ болот. Ал эми барабарсыздыктын сол жагындагы $\cos x$ функциясы $\forall\, x$: $|\cos x| \leq 1$.

Бул шарттардын экөөсү тең бир гана $x = 0$ чекитинде

$\cos x \geq 1 + |x| \Rightarrow \cos 0 \geq 1 + |0| \Leftrightarrow\ 1 \geq 1$ көрүнүшүндө аткарылат.

Туура жообу (г).◄

§1.8 Туунду жана анын колдонулуштары

1.$f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусун эсептегиле.

1 – МИСАЛ : $f(x) = 3x + \sqrt{x}$функциясынын $x_0 = 16$ чекитиндеги.

Жооптор . а) $2\frac{3}{4}$; б) $3\frac{1}{4}$; в) $3\frac{1}{8}$; г) $2\frac{7}{8}$; д) 3.

► ЭСЕПТӨӨ. (§2.21 – оку)Туунду алуунун касиеттерин жана таблицасын колдонуп, функциянын

$$f'(x) = \left(3x + \sqrt{x}\right)' = (3x)' + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 3 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} =$$

$= 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ туундусун эсептейбиз.

Анда $f'(x_0) = f'(16) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{16}} = 3 + \frac{1}{2\cdot 4} =$

$= 3 + \frac{1}{8} = \frac{3\cdot 8+1}{8} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$. Туура жообу в) $3\frac{1}{8}$. ◄

2 – МИСАЛ : $f(x) = x^3 \ln x$ функциясынын $x_0 = 1$ чекитиндеги.

Жооптор . а) -1; б) 1 ; в) 2 ; г) 4 ; д) 3.

► ЭСЕПТӨӨ. Көбөйтүндөн туунду алуунун $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ эрежесин колдонуп,

$$f'(x) = (x^3 \cdot \ln x)' = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} =$$

$= 3x^2 \cdot \ln x + x^2$ туундусун эсептеп, анын $x_0 = 1$ чекитиндеги мааниси

$$f'(x_0) = f'(1) = 3 \cdot (1)^2 \cdot \ln 1 + (1)^2 = 3 \cdot 1 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Туура жообу б) 1. ◄

3 – МИСАЛ : $f(x) = \sqrt{2x+5}$функциясынын $x_0 = 2$ чекитиндеги.

Жооптор . а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{2}{3}$; д) 1.

► ЭСЕПТӨӨ. Татаал функциядан туунду алуу $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ эрежесин колдонобуз.

Бизде $u = 2x + 5$ болгондуктан,

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x+5}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot (2x+5)' =$$

$= \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot (2+0) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ көрүнүшүндөгү туундусун табабыз. Мындан

$f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2+5}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ мааниси аныкталат.

Туура жообу б) $\frac{1}{3}$. ◄

4 – МИСАЛ : $f(x) = e^x \sin x + x$ функциясынын $x_0 = 0$ чекитиндеги.

Жооптор . а) 3 ; б) 1 ; в) -1 ; г) 2 ; д) π.

► ЭСЕПТӨӨ. $f'(x) = (e^x \sin x + x)' = (e^x \sin x)' + (x)' =$

$= (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' + (x)' = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x + 1$ көрүнүшүндөгү туундусун тапкан болобуз. Анда

$f'(x_0) = f'(0) = e^0 \cdot \sin 0 + e^0 \cdot \cos 0 + 1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 = 2$ маанисин тапкан болобуз. Туура жообу г) 2 . ◄

5 – МИСАЛ : Кайсы бир А чекитинен баштап, $S = t^3 - 3t + 4$ м. – мыйзамы менен сызыктуу кыймылда болгон тело берилсин, анда анын

кыймыл башталгандан кийинки убакыттын $t = 3$ сек. ирмеминдеги v ылдамдыгын тапкыла.

Жооптор . а) 24 ; б) 28 ; в) 30 ; г) 25 ; д) 34.

► ЭСЕПТӨӨ. Функциянын туундусу жөнүндөгү түшүнүк механикалык маселелерди чечүү процессинде келип чыгып, басып өткөн жолдон убакыт боюнча алынган алынган туунду – убакыттын t_0 ирмеминдеги ылдамдыкты түшүндүрөрү белгилүү. Ошондуктан

$v = S'(t) = (t^3 - 3t + 4)' = 3t^2 - 3 + 0 = 3\,(t^2 - 1)$ туундусун эсептеп, анын $t_0 = 3$ сек ирмеминдеги маанисин табабыз:

$S'(t_0) = 3[(t_0)^2 - 1] = 3\,(3^2 - 1) = 24$. Туура жообу а) 24.◄

6 – МИСАЛ : Кайсы бир А чекитинен баштап, $S = t^3 - 3t + 4$ м. – мыйзамы менен сызыктуу кыймылда болгон тело берилсин. Анда тело, ушул кыймыл башталгандан соң канча убакыттан кийин кайра токтойт же $v \equiv 0$ болот.

Жооптор . а) 2 ; б) 1; в) 3 ; г) $\frac{1}{2}$; д) 4.

► ЭСЕПТӨӨ. Туундунун механикалык чечмелениши боюнча убакыттын t ирмеминдеги ылдамдык $v = S'(t) = (t^3 - 3t + 4)' = 3t^2 - t + 0 = 3t^2 - t$ туундусу менен эсептелет. Биз ылдамдык $v \equiv 0 \Leftrightarrow\ 3t^2 - t = 0$ шартына баш ийген убакыттынt ирмемин табышыбыз керек. Анда$v \equiv S'(t) = 0$: $3t^2 - t = 0 \;\;\Rightarrow\;\; t \cdot (t - 1) = 0$ теңдемесинин $t_1 = 0,\ t_2 = 1$ чечимдерин табабыз,

Убакыттын $t_1 = 0$ ирмеминде кыймыл башталбагандыктан ылдамдык $v = 0$ болору белгилүү. Ошондуктан туура жооп катары убакыттын $t_2 = 1$(б) ирмемин алабыз. ◄

2. $f(x)$ функциясынын графигине жүргүзүлгө жаныма түз менен берилген түз параллель боло тургандай чекиттерди аныктагыла.

7 – МИСАЛ : $f(x) = x^5 - 5x + 1$ функциясынын жанымасы $0x$ огуна параллель болгон чекиттерди.

Жооптор . а) $(0;\ \ 1)$;   б) $(1; -3), (-1;\ \ 5)$;   в) $(2;\ \ 23),\ (-2;\ -21)$;

г) $\left(\sqrt{2}\,, -\sqrt{2}+1\right)$;   д) $(3;\ \ 229)$.

► ТАБУУ. §2.22 – де белгиленгендей геометриялык жактан $f'(x_0)$ туундусу, $f(x)$функциясынын графигине $\left(x_0;\ \ f(x_0)\right)$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныма түзүнүн бурчтук $k = f'(x_0) = tg\ \alpha$ коэффициенти болот. Мында $y_0 = f(x_0),\ \alpha -$бурчу $0x$ огу менен жаныма түздүн арасындагы оң бурч (саат стрелкасына каршы) . Анда жаныманын теңдемеси $y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ көрүнүшүндө жазылат.

Эки түз параллель жайгашышы үчүн алардын бурчтук коэффициенттери барабар болушу керек. $0x$ огунун бурчтук коэффициенти $k = 0$ болгондуктан, жаныма түз ага параллель болушу үчүн $k = f'(x_0) = 0$ шарты аткарылышы керек. Анда берилген функциянын туундусун $f'(x) = (x^5 - 5x + 1)' = 5x^4 - 5$эсептеп,нөлгө теңдеп$5x^4 - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, туундунун нөлдөрүн же жаныма жүргүзүлүүчү чекиттердин абсциссаларын табабыз. Мындан

$$f(x_0) = {x_0}^5 - 5x_0 + 1 = (1)^5 - 5(1) + 1 = -3;$$

$f(x_0) = {x_0}^5 - 5x_0 + 1 = (-1)^5 - 5(-1) + 1 = -1 + 5 + 1 = 5$ жаныма жүргүзүлүүчү чекиттердин ординаталары аныкталат. Демек эки башка$(1;\ -3),\ (-1;\ \ 5)$ чекиттеринен функциянын графигине жүргүзүлгөн жаныма түздөр $0x$ огуна параллель болушат.

Туура жообу б) $(1; -3), (-1;\ \ 5)$. ◄

8 – МИСАЛ : $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ функциясынын жанымасы $y = 3x\ (k = 3)$ түзүнө параллель болгон чекитти.

Жооптор . а) $(-1;\ -2)$;   б) $(-1;\ \ 0)$;   в) $(1;\ \ 0)$, ;   г) $\left(\frac{1}{2};\ -3\,\frac{1}{2}\right)$;

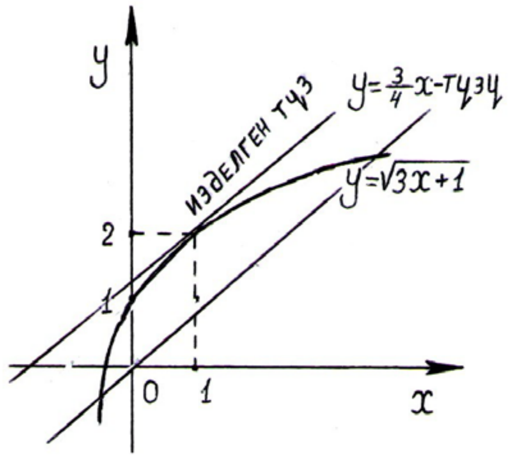
д) $\left(2;\ \ 1\frac{3}{4}\right)$.

► ТАБУУ.$f'(x) = \left(x - \frac{1}{x^2}\right)' = (x)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)' = 1 + \frac{1}{x^4} \cdot (x^2)' =$

$= 1 + \frac{1}{x^4} \cdot 2x = 1 + \frac{2}{x^3}$ туундусун эсептеп, $k = f'(x) \equiv 3$ шартын канааттандырган x чекиттерин издейбиз.

Анда $1 + \frac{2}{x^3} = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow x_0 = 1$ келип чыгат.$y_0 = f(x_0) = x_0 - \frac{1}{{x_0}^2} = 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0$ болуп, $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ функциясынын графигине $(x_0; \ y_0) = (1; \ 0)$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныма түз менен, $y = 3x$ түзү параллель болушат деген туура (в) жоопту алабыз.◀

9 – МИСАЛ : $f(x) = \sqrt{3x+1}$ функциясынын жанымасы $y = \frac{3}{4}x$түзүнө параллель болгон чекитти (1.33 – чийме).



1.33-чийме

Жооптор .

а) $(0; \ 1)$; б) $(2; \ \sqrt{7})$; в) $\left(\frac{8}{3}; \ 3\right)$, ;

► ТАБУУ. Берилген түздүн бурчтук коэффициенти $k = \frac{3}{4}$. Анда $f'(x) = \left(\sqrt{3x+1}\right)' = \frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ туундусун эсептеп, ал геометриялык жактан жаныманын бурчтук коэффициенти болгондуктан, $f'(x) \equiv k \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$шартын канааттандырган x санын издейбиз. Коюлган шартты $\frac{3}{4} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \frac{3}{2}$ ге $б\theta л\gamma п$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$, мындан $2 \cdot \sqrt{3x+1} \neq 0$ же $x \neq -\frac{1}{3}$ деп эсептеп, теңдеменин эки жагын тең $2 \cdot \sqrt{3x+1}$ туюнтмасына көбөйтүп, $\sqrt{3x+1} = 2$ теңдемесине ээ болобуз. Анын эки жагын тең квадратка көтөрүп,$3x + 1 = 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x_0 = 1$ чечимин табабыз. Табылган x_0 чечими жаныма жүргүзүлүүчү чекиттин абсциссасы болот. Жаныма жүргүзүлүүчү чекиттин ординатасы $y_0 = f(x_0) = \sqrt{3x_0 + 1} = \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = \sqrt{4} = 2$ саны болот. Анда берилген функциянын графигине $(x_0; \ y_0) = (1; \ 2)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз, берилген $y = \frac{3}{4}x$ түзүнө параллель болот деген кортунду чыгарабыз.

Туура жообу г) $(1;\ 2)$. ◄

3.$(x_0;\ y_0)$ чекитинен функциянын графигин жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемесин түзгүлө.

10 – МИСАЛ : $f(x) = x - 3x^2$ функциясына $x_0 = 2$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын.

Жооптор . а) $y = -32 + 11x$; б) $y = -12 + 11x$;

в) $y = 12 - 11x$; г) $y = 11x + 12$; д) $y = 11x + 32$.

► ТҮЗҮҮ. Берилген функциянын графигине жаныма жүргүзүүчү чекиттин ординатасын табалы

$y_0 = f(x_0) = x_0 - 3(x_0)^2 = 2 - 3 \cdot (2)^2 = -10$. Анда жаныма жүргүзүлүүчү чекит $(x_0;\ y_0) = (2;\ -10)$ координаталарына ээ болот.

Экинчи кадамда жаныма түздүн бурчтук k коэффициентин аныктайбыз. Ал үчүн функциянын туундусун

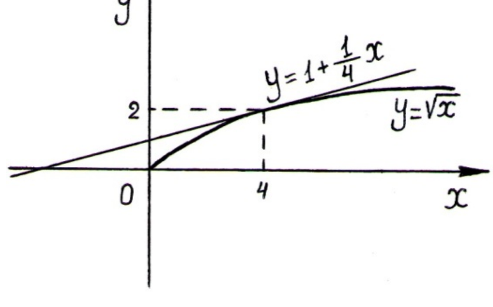
$f'(x) = (x - 3x^2)' = 1 - 6x$ эсептеп, анын x_0 чекитиндеги маанисин же k ны $k = f'(x_0) = 1 - 6x_0 = 1 - 6 \cdot (2) = -11$ табабыз.

Берилген бир $(x_0;\ y_0)$ чекитинен өтүп, бурчтук коээфициенти k болгон түздүн теңдемеси $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$ көрүнүшүндө жазылгандыктан, жаныма түз

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ же $y — 10 = -11 \cdot (x - 2)$ ⇨

$y = -11x + 22 - 10$ же

$y = -11x + 12$ теңдемеси менен берилет. Туура жообу в) $y = 12 - 11x$. ◄



1.34-чийме

11 – МИСАЛ : $f(x) = \sqrt{x}$ функциясына ординатасы $y_0 = 2$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын (1.34 – чийме).

Жооптор . а) $y = 2 + 4x$;

$$б)\ y = 1 + \frac{1}{4}x\ ; \quad в)\ y = 3 - \frac{1}{4}x\ ;$$

$$г)\ y = 1 - 4x\ ; \quad д)\ y = 1 - 2x.$$

► ТҮЗҮҮ. Берилген функциянын графигине жаныма жүргүзүлүүчү $(x_0;\ y_0)$ чекиттин ординатасы менен абсциссасы $y_0 = f(x_0)$ же $2 = \sqrt{x_0}$ байланышында болору белгилүү. Мындан $x_0 = 2^2 = 4$ келип чыгат. Ошентип функциянын графигине жаныма жүргүзүлүүчү чекит $(x_0;\ y_0) = (4;\ 2)$ табылды. Жаныма түздүн бурчтук коэффициенти

$k = f'(x_0)$ болгондуктан, $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow$

$k = f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4}$ келип чыгат. Анда изделүүчү жаныма түздүн теңдемеси

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ же $y - 2 = \frac{1}{4} \cdot (x - 4) \quad \Rightarrow$

$y = \frac{1}{4}x - 1 + 2$ же $y = \frac{1}{4}x + 1$

көрүнүшүндө жазылат. Туура жообу б) $y = 1 + \frac{1}{4}x$. ◄

4. Функциялардын өсүү аралыгын тапкыла.

12 – МИСАЛ : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ функциясынын.

Жooптор . а) $(-2,\ 3)$; б) $[-2,\ 3]$; в) $(-\infty, -2],\ [3, +\infty)$;

г) $(-\infty, -2)$, $(3, +\infty)$; д) $[3, +\infty)$ аралыктары.

► ТАБУУ. (§2.24 – оку) Аргументтин чоң маанисине функциянын да чоң мааниси туура келсе же $x > x_0 \ \Leftrightarrow\ f(x) \geq f(x_0)$ болсо, анда монотондуу өсүүчү болот. Бул учурдабөлчөктүн алымы менен бөлүмү нөлдөн чоң болгондуктан, $\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \geq 0$ болот.Функциянын туундусунун аныктамасы боюнча

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = f'(x_0) \text{ болгондуктан, предел}$$

алдындагы туюнтманын нөлдөн чоңболушунан$f'(x_0) \geq 0$ болору келип чыгат. Ошондуктан берилген функция, туундусу оң болгон чекиттерде өсүүчү болот. Функциянын

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 36x)' = 6x^2 - 6x - 36$$

туундусун таап, анын белгилери өзгөргөн аралыктарга көңүл бурабыз. Оболу туундунун нөлдөрүн табабыз: $6x^2 - 6x - 36 = 0$ аны $6 \neq 0$ санына бөлүп жиберип,

$x^2 - x - 6 = 0$ квадраттык теңдемесинин

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, $x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$,$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$ нөлдөрүн аныктайбыз.

$у = ax^2 + bx + c = x^2 - x - 6$ функциясында $a = 1 > 0$ болгондуктан, функциянын гарфиги бутактары жогору караган парабола болуп, нөлдөрүнүн арасында нөлдөн кичине, ал эми алардын сыртында нөлдөн чоң маанилерге ээ

$\overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_ -2}^{x^2-x-6\geq 0}\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{x^2-x-6<0}\overbrace{3\_\_\_\_\_\_\_}^{x^2-x-6\geq 0}$ болот. Андай болсо

функциянын туундусу $(-\infty, -2]$, $[3, +\infty)$ аралыктарында нөлдөн чоң же барабар болуп, функция өсүүчү болот.

Туура жообу в) $(-\infty, -2]$, $[3, +\infty)$.◄

13 – МИСАЛ : $f(x) = e^x - x$ функциясынын.

Жооптор . а)$(-\infty, \ 0]$; б) $[0, +\infty)$; в) $[0, \ 1)$; г) $(1, +\infty)$;

д) $(-\infty, \quad 1)$ аралыктары.

► ТАБУУ. Берилген функциянын туундусу

$f'(x) = (e^x - x)' = e^x - 1$ болуп,

$f'(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ e^x - 1 \geq 0 \Rightarrow \ e^x \geq 1 \ \Rightarrow \ e^x \geq e^0 \ \Rightarrow \ x \geq 0$, анткени көрсөткүчтүү функциянын негизи болгон e саны бирден чоң.

Демек, функция $x \geq 0$ болгондо же $[0, +\infty)$ аралыгында өсүүчү же туура жообу (б).◄

14 – МИСАЛ : $f(x) = \log_2(2x^2 - 3x - 2)$ функциясынын.

Жооптор . а)$(-\infty,\ 2)$; б) $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]$; в) $(2, +\infty)$; г) $\left(-2,\ \frac{1}{2}\right)$;

д) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ аралыктары.

► ТАБУУ. Туундусун $f'(x) = (\log_2(2x^2 - 3x - 2))' = \frac{(2x^2-3x-2)'}{(2x^2-3x-2)\cdot\ln 2} = \frac{4x-3}{(2x^2-3x-2)\cdot\ln 2}$ таап, анын оң белгидеги аралыктарын издейбиз.$\ln 2 > 0$ сан, анткени логарифмдин негизи $e > 1$жана логарифмдин алдындагы $2 > 1$чоң. Мындан сырткары логарифдин алдындагы туюнтма катары

$2x^2 - 3x - 2 > 0$ болушу зарыл.

Анда $f'(x) = \frac{4x-3}{(2x^2-3x-2)\cdot\ln 2} \geq 0$ бөлчөгү эки учурда оң:

1) $\begin{cases} 4x - 3 \geq 0, \ (\text{алымы}) \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \ (\text{бөлүмү}) \end{cases} \Rightarrow$

1 – жолчо: $4x \geq 3 \ \Rightarrow \ x \geq \frac{3}{4}$ же $x \in \left[\frac{3}{4},\ +\infty\right)$болсо;

2 – жолчонун $2x^2 - 3x - 2 > 0 \quad \Rightarrow$ нөлдөрүн

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4},$$

$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2, \ \ x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ таап, алардын арасында терс, ал эми

сыртында оң болорун көрөбүз же $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$

$$-\infty\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{2x^2-3x-2>0}-\frac{1}{2}\underbrace{\_\_0\_\_\frac{3}{4}\_\_\_\_\_\_}_{2x^2-3x-2<0}2\overbrace{\qquad\qquad}^{2x^2-3x-2>0}+\infty\ .$$

Эки жолчонун тең оң болуу аралыктары алардын кесилиши катарында

$\left\{\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)\right\}\cap\left[\frac{3}{4},\ +\infty\right)=(2,+\infty)$ аралыгы болот.

2) $\begin{cases} 4x-3\le 0, \ \text{(алымы)} \\ 2x^2-3x-2<0\ \text{(бөлүмү)} \end{cases}$ ⇨ учуру каралбайт, анткени

$2x^2-3x-2>0$ болсун деген шарт коюлган.

Туура жообу в) $(2,+\infty)$. ◄

5. Функциялардын кемүү аралыктарын тапкыла.

15 – МИСАЛ : $f(x)=2x^3+9x^2-24x$ функциясынын.

Жооптор . а)$(-\infty,-4],[1,+\infty)$; б) $[-4,\ 1]$; в) $\left(-2,\ \frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$;

г) $\left(-2,\ \ \frac{1}{2}\right)$; д) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ аралыктары.

► ТАБУУ. (§2.24 – оку)Аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси туура келсе же $x\le x_0 \ \Leftrightarrow\ f(x)\ge f(x_0)$ болсо, анда функция монотондуу кемүүчү болот. Бул учурда

$\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\le 0$ болот, анткени бөлчөктүн алымы $x\le x_0\ \Leftrightarrow\ x-x_0\le 0$ нөлдөн кичине, ал эми бөлүмү $f(x)\ge f(x_0)\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\ge 0$нөлдөн чоң болушат. Функциянын туундусунун аныктамасы боюнча

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=f'(x_0)\ \text{болгондуктан,}$$

предел алдындагы туюнтманын нөлдөн кичине болушунан

$f'(x_0)\le 0$ болору келип чыгат. Ошондуктан берилген функция, туундусу нөлдөн кичине болгон чекиттерде кемүүчү болот. Демек, функциянын

$f'(x)=(2x^3+9x^2-24x)'=6x^2+18x-24=6(x^2+3x-4)$ туундусун таап, $f'(x)\le 0\ \Leftrightarrow\ x^2+3x-4\le 0$барабарсыздыгынын чыгарылыш аралыгында функция кемүүчү болот дейбиз. Оболу нөлдөрүн

$$x^2+3x-4=0 \;\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=$$

$=\frac{-3\pm5}{2}$, $x_1=\frac{-3+5}{2}=1$, $x_2=\frac{-3-5}{2}=-4$ таап, квадраттык үч мүчө алардын арасында терс, ал эми сыртында оң болорун көрөбүз

$$-\infty\overbrace{\_\_\_\_\_\_}^{x^2+3x-4>0}\underbrace{-4\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_1}_{x^2+3x-4\le0}\overbrace{\_\_\_\_\_\_}^{x^2+3x-4>0}+\infty\,.$$

Анда $f'(x)\le0$ шарты $[-4,\ 1]$ аралыгында аткарылып функция кемүүчү болот.Туура жообу б). ◄

16 – МИСАЛ : $f(x)=x+\frac{1}{x}$ функциясынын.

Жооптор . а)$(-\infty,-1],[1,+\infty)$; б) $[-1,\ 1]$; в) $[-1,\ 0),(0,\ 1]$;

г) $(0,+\infty)$; д) $(-\infty,\quad 0)$ аралыктары.

► ТАБУУ.Берилген функциянын $f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$ туундусун таап, анын терс болгон аралыгын издейбиз. Анда

$f'(x)\le0 \;\Leftrightarrow\; 1-\frac{1}{x^2}\le0 \Rightarrow x\ne0$ деп эсептеп, x^2оң санына көбөйтсөк $x^2-1\le0\Rightarrow$

$x^2\le1 \;\Rightarrow\; |x|\le1 \;\Leftrightarrow\; -1\le x\le1$ келип чыгат. $x\ne0$ деп эсептелгендиктен

$-1\le x<0$ жана $0<x\le1$ аралыктарында $f'(x)\le0$ болору же функциянын кемий тургандыгы көрүнөт. Туура жообу в) $[-1,\ 0),(0,\ 1]$. ◄

17 – МИСАЛ : $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x^2-3x-10}}$ функциясынын.

Жооптор . а)$(-\infty,-2)$; б) $(-\infty,-2]$; в) $(5,+\infty)$;

г) $[5,+\infty)$; д) $(-2,\quad 5)$ аралыктары.

► ТАБУУ. Туундусун

$$f'(x) = \left(\frac{5}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}\right)' = 5\left[(x^2 - 3x - 10)^{-\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= -\frac{5}{2}(x^2 - 3x - 10)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 - 3x - 10)' =$$

$= -\frac{5}{2}(x^2 - 3x - 10)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x - 3) = \frac{-\frac{5}{2}(2x-3)}{\sqrt{(x^2-3x-10)^3}}$ эсептеп, анын терс болуу аралыгын издейбиз. Туундунун жашашы үчүн бөлчөктүн бөлүмү катарында $x^2 - 3x - 10 \neq 0$ жана квадраттык тамыр алдындагы туюнтма катары оң сан болушу керек. Анда $x^2 - 3x - 10 > 0$ болгон аралыкты табалы. Анын нөлдөрү

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \;\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} =$$

$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$, $x_1 = \frac{3+7}{2} = 5$, $x_2 = \frac{3-7}{2} = -2$ сандары болушат. Мындан $x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$

$-\infty \overbrace{\qquad\qquad}^{x^2-3x-10>0} -2 \underbrace{\qquad 0 \qquad\qquad}_{x^2-3x-10<0} 5 \overbrace{\qquad\qquad}^{x^2-3x-10>0} +\infty$ болору келип чыгат. Табылган туундунун бөлүмү,квадраттык тамыр алдындагы туюнтма катарында бул аралыктарда дайыма нөлдөн чоң болот. Анда бөлчөк терс болушу үчүн, алымы терс болушу керек.

x ти аталган аралыктарда өзгөрөт деп ойлоп, туундунун алымынын терс болуу аралыгын тактайлы: $-\frac{5}{2}(2x - 3) < 0 \;\Rightarrow$ эки жагын тең $\left(-\frac{5}{2}\right)$ санын бөлсөк,

$2x - 3 > 0 \;\Rightarrow\; 2x > 3 \;\Rightarrow\; x > \frac{3}{2}$ же $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ аралыгында өзгөрөт.

Коюлган акыркы шарт менен туундунун жашоо шартын кесилиштирип, $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \cap \{(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)\} = (5, +\infty)$ аралыгында туундунун терс болорун көрөбүз.

Туура жообу в) $(5, +\infty)$. ◄

6. Берилген кесиндиде функциялардын эң чоң жана кичине маанилерин тапкыла.

18 – МИСАЛ : $[-5,-1]$ кесиндисинде $f(x) = 3x^2 + 18x + 7$ функциясынын.

Жооптор . а) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = -8$, $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = -8$; б) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = 8$,

$\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = -20$; в) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = 20$, $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = 8$;

г) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = 5$, $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = 1$; д) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = -1$,

$\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = -3$.

► ТАБУУ. Кесиндиде же туюк аралыкта аныкталган жана үзгүлтүксүз функциялар, ушул кесиндинин чегинде өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерине сөзсүз жетери Вейерштрасстын теоремасында далилденген. Аларды табуу үчүн

1) Берилген аралыктагы функциянын стационардык чекиттеги маанилерин;

2) Функциянын аралыктын учтарындагы маанилерин;

3) Туундусу жашабаган чекиттердеги функциянын маанилерин

аныктап, алардын ичинен эң чоңун жана эң кичинесин тандайбыз.

Экстремум чекиттери $f'(x) = 0$ шартына (зарыл шарт) баш ийген стационардык (критикалык же шектүү) чекиттердин арасынан тандалат. Анда $f'(x) = (3x^2 + 18x + 7)' = 6x - 18 \;\Rightarrow\; 6x - 18 = 0 \;\Rightarrow$

$x = 3$ келип чыгып, бул чекит берилген кесиндиге таандык эмес, ошондуктан бул чекиттеги

$f(3) = 3(3)^2 + 18(3) + 7 = 27 + 54 + 7 = 88$ маанисин карабайбыз.

Аралыктын учтарында

$$f(-5) = 3(-5)^2 + 18(-5) + 7 = 75 - 90 + 7 = -8,$$

$f(-1) = 3(-1)^2 + 18(-1) + 7 = 3 - 18 + 7 = -8$ маанилерге жетет.

Берилген аралыкта туундусу жашабаган чекит жок.

Демек, $\{-8, -8\}$ сандарын салыштырып, берилген аралыкта $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = -8$, $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-5,-1]} = -8$ деген тыянакка келебиз.

Туура жообу (а). ◄

19 – МИСАЛ : $[-4,\ 4]$ кесиндисинде $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ функциясынын.

Жооптор . а) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = 24$, $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = -41$;

б) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = 1$, $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = -41$; в) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = 41$,

$\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = -80$; г) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = -24$, $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = -80$;

д) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = 1$, $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = -80$.

► ТАБУУ.Функцияны берилген аралыктагы стационардык же туундусу нөлгө тең болгон чекиттерин табалы. Ал үчүн функциянын туундусун эсептеп

$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 9x - 4)' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$, анын нөлдөрүн же стационардык чекиттерин $(3 \neq 0)$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\ \pm\ \sqrt{b^2\ -\ 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-2) \pm\ \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} =$$

$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm\ 4}{2}$, $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$, $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$ табабыз. Табылган стационардык же критикалык чекиттердеги функциянын маанилерин эсептейбиз:

$$f(3) = (3)^3 - 3 \cdot (3)^2 - 9 \cdot (3) - 4 = 27 - 27 - 27 - 4 = -31;$$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) - 4 = -1 - 3 + 9 - 4 = 1.$

Аралыктын учтарындагы функциянын маанилерин эсептейли:

$f(-4) = (-4)^3 - 3 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) - 4 = -64 - 48 + 36 - 4 = -80;$

$f(4) = 4^3 - 3 \cdot (4)^2 - 9 \cdot (4) - 4 = 64 - 48 - 36 - 4 = -24.$

Берилген кесиндиде функциянын туундусу жашабай турган чекиттер жок.

Анда функциянын табылган маанилерин $\{-80,\ -31,\ -24,\ \ 1\}$ салыштырып, алардын эң чоңу 1, ал эми эң кичинеси "-80" деген жоопту алабыз.

Туура жообу:д) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = 1,\ \underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-4,\ 4]} = -80$. ◀

20 – МИСАЛ : $[-1,\ 3]$ кесиндисинде $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3+x-\frac{1}{4}x^2}}$ функциясынын.

Жооптор . а) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = \frac{6}{\sqrt{7}},\ \underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = \frac{6}{\sqrt{17}}$; б) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = \frac{3}{2},$

$\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; в) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = \frac{6}{\sqrt{7}},$ $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = \frac{3}{2}$;

г) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = 6,$ $\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = 3;$ д) $\underbrace{max\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = \sqrt{7},$

$\underbrace{min\{f(x)\}}_{x\in[-1,\ 3]} = \frac{3}{2}$.

► ТАБУУ. Функциянын стационардык чекиттерин, же $f'(x) = 0$ шартын канааттандырган чекиттерин аныктайбыз.

$$f'(x) = \left(\frac{3}{\sqrt{3+x-\frac{1}{4}x^2}}\right)' = \left[3\left(3+x-\frac{1}{4}x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(3 + x - \frac{1}{4}x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\left(3 + x - \frac{1}{4}x^2\right)' =$$

$= -\frac{3}{2}\left(3 + x - \frac{1}{4}x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{3\left(1-\frac{1}{2}x\right)}{2 \cdot \sqrt{\left(3+x-\frac{1}{4}x^2\right)^3}}$. Берилген функция жана анын туундусунун жашашы үчүн$3 + x - \frac{1}{4}x^2 > 0$ шарты аткарылсын деген талап коюлат, анткени биринчиден оң сандан гана квадраттык тамыр алууга болот, экинчиден бөлчөктүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу болушу керек. Шарткоюлган барбарсыздыктын эки жагын тең “-4” көбөйтүп,$x^2 - 4x - 12 < 0$ көрүнүшүнө (чоң, кичинеге алмашты) келтиребиз. Барабарсыздыктагы квадраттык үч мүчөнүн

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - ac} =$$

$= -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - (-12) \cdot 1} = 2 \pm \sqrt{16} = 2 \pm 4,\ x_1 = 2 + 4 = 6,$ $x_2 = 2 - 4 = -2$ нөлдөрүн таап, анын графиги бутактары жогору караган парабола болгондуктан, нөлдөрдүн арасында нөлдөн кичине же терс , алардын сыртында нөлдөн чоң же оң маанилерди кабыл аларын

$-\infty \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}^{x^2-4x-12>0} -2 \underbrace{\_\_\_\_\_ 0 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{x^2-4x-12<0} 6 \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}^{x^2-4x-12>0} +\infty$ көрөбүз.

Анда функциянын жашоо аралыгы катарында $(-2,\ 6)$ интервалын алабыз.

Функциянын эң чоң жана кичине маанилерин табуу талап кылынган кесинди, анын туундусунун жашоо аймагында кармалып турганына $[-1,\ 3] \subset (-2,\ 6)$ күбө болуп, изилдөөнү улантабыз.

Берилген функциянын туундусу $f'(x) = -\frac{3\left(1-\frac{1}{2}x\right)}{2 \cdot \sqrt{\left(3+x-\frac{1}{4}x^2\right)^3}}$ бөлчөк функция болуп, $[-1,\ 3]$ аралыгынын бардык чекиттеринде анын бөлүмү нөлдөн чоң болот. Бөлчөк нөлгө тең болушу үчүн, алымынын

$3\left(1-\frac{1}{2}x\right)=0$ нөлгө тең болушу жетиштүү. Мындан функциянын $1-\frac{1}{2}x=0 \;\Rightarrow\; x=2$ (функциянын ЖА сына кирет) стационардык чекитин табабыз.

Функциянын стационардык чекиттеги маанисин

$f(2)=\frac{3}{\sqrt{3+2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3+2-1}}=\frac{3}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$ эсептейли.

Функциянын аралыктын учтарындагы маанилерин

$f(-1)=\frac{3}{\sqrt{3+(-1)-\frac{1}{4}\cdot(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3-1-\frac{1}{4}}}=\frac{3}{\sqrt{\frac{7}{4}}}=\frac{6}{\sqrt{7}}$;

$f(3)=\frac{3}{\sqrt{3+3-\frac{1}{4}\cdot 3^2}}=\frac{3}{\sqrt{6-\frac{9}{4}}}=\frac{3}{\sqrt{\frac{17}{4}}}=\frac{6}{\sqrt{17}}$ табабыз.

$[-1,\;3]$ аралыгында функциянын туундусу жашабаган чекиттер жок.

Анда функциянын табылган маанилерин $\left\{\frac{3}{2}\,,\;\frac{6}{\sqrt{7}}\,,\;\frac{6}{\sqrt{17}}\right\}$ салыштырып, алардын эң чоңу $\frac{6}{\sqrt{7}}$, ал эми эң кичинеси $\frac{6}{\sqrt{17}}$ болорун көрөбүз. Туура жообу а). ◄

7. Функциялардын экстремумдарын тапкыла.

21 – МИСАЛ : $f(x)=3x^4-4x^3+2$ функциясынын (§2.25 – кара).

Жооптор . а) $x_{min}=0,\; x_{max}=1;$ б) $x_{min}=1,\; x_{max}=0;$

в) $x_{min}=1;$ г) $x_{min}=0;$ д) экстремумдары жок.

► ТАБУУ . Функциянын экстремумдары деп, анын кайсы бир аралыктагы же бир чекиттин чеке белиндеги максималдык же минималдык маанилерин айтабыз. Функция аныкталуу областынын чегинде бир, же бир канча максималдык жана минималдык маанилерге же экстремумдарга ээ болушу мүмкүн.

Ферманын теоремасы боюнча x_0 чекити экстремум чекити болсо, анда $f'(x_0)=0$ шарты (зарыл шарт) аткарылат. Ошондуктан аны

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x^4 - 4x^3 + 2)' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2 \cdot (x-1) \equiv 0$ шартына баш ийген, б.а. стационардык чекиттердин арасынан издейбиз.

Анда $12x^2 \cdot (x-1) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = 0,\; x_2 = 1$ стационардык чекиттерин аныктап, алар аркылуу өткөндө $f'(x)$ тин белгилеринин өзгөрүшүнө (жетиштүү шарт) көңүл бурабыз.

1) $x < x_1 = 0 \;\; \Rightarrow$ анда биринчи көбөйтүүчү $12x^2 > 0$, ал эми экинчи көбөйтүүчү $x - 1 < 0$, алардын көбөйтүндүсү катарында

$f'(x) < 0$ же $(-)$ белгиде болот.

$1 > x > x_1 = 0$ аралыгында жогрудагы абал кайталанып, $f'(x) < 0$ белгиси өзгөрбөй $(-)$ бойдон калат. Демек, бул чекит экстремум чекити боло албайт.

2) $0 < x < x_2 = 1 \;\; \Rightarrow$ биринчи көбөйтүүчү $12x^2 > 0$, ал эми экинчи көбөйтүүчү$x - 1 < 0$, алардын көбөйтүндүсү катарында $f'(x) < 0$ же $(-)$белгиде болот.

$x > x_2 = 1 \;\; \Rightarrow$ биринчи көбөйтүүчү $12x^2 > 0$, экинчи көбөйтүүчү да $x - 1 > 0$ же $(+)$ белгисине өтөт. Экөөсүнүн көбөйтүндүсү катарында $f'(x) > 0$ же $(+)$ белгиде болот. Демек, $x_2 = 1$ чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$ белгисин $(-)$ тан $(+)$ ка өзгөртүп, $x_2 = 1$ минимум чекити болот.

Ошентип берилген функциянын максималдык чекиттери жок, болгону минималдык чекитине ээ. Туура жообу в) $x_{min} = 1$. ◄

22– МИСАЛ : $f(x) = 0{,}5x + \sin x$ функциясынын.

Жооптор . а) $x_{min} = -\frac{2\pi}{3},\; x_{max} = \frac{2\pi}{3}$; б) $x_{min} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$,

$$x_{max} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\;\; k \in Z; \text{в) } x_{min} = -\frac{\pi}{6}, \qquad x_{max} = \frac{\pi}{6};$$

$$\text{г) } x_{max} = \frac{\pi}{6} + \pi k,\;\; k \in Z\,; \qquad \text{д) } x_{min} = -\frac{\pi}{6} + \pi k,\;\; k \in Z\,.$$

► ТАБУУ .Туундусун эсептеп $f'(x) = (0{,}5x + \sin x)' = 0{,}5 + \cos x$, функциянын стационардык чекиттерин

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5 + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$x = \pm arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$ (1.28 – чийме) табабыз. $k = 0$ болгон учурда $x = \pm\frac{2\pi}{3}$ стационардык чекиттери аркылуу өткөндө $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x$ туундусунун белгисинин өзгөрөрүн же өзгөрбөшүн карайлы.

1. $x = \frac{2\pi}{3}$ чекитинде: а) $x < \frac{2\pi}{3}$ болсун, анда чиймеден көрүнгөндөй косинуска абсциссасы $\left(-\frac{1}{2}\right)$ нин оң жагындагы чекиттер маани болуп, $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x$, $(+)$ белгиге ээ.

б) $x > \frac{2\pi}{3}$ болсун, анда косинуска абциссасы $\left(-\frac{1}{2}\right)$ сол жагындагы чекиттер маани болуп,

$f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x$, $(-)$ белгиге ээ.

2. $x = -\frac{2\pi}{3}$ чекитинде: а) $x < -\frac{2\pi}{3}$ болсун, анда косинуска абсциссасы $\left(-\frac{1}{2}\right)$ сол жагындагы чекиттер маани болуп, $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x$, $(-)$ белгиге ээ.

б) $x > -\frac{2\pi}{3}$, анда косинуска абсциссасы $\left(-\frac{1}{2}\right)$ нин оң жагындагы чекиттер маани болуп, $f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x$, $(+)$ белгиге ээ.

Ошентип $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$ чекиттери аркылуу өткөндө туунду белгисин $(+)$ тан $(-)$ ка өзгөртүп $x_{max} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ чекити болот.

$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ чекити аркылуу өткөндө туунду белгисин $(-)$ тан $(+)$ ка өзгөртүп

$x_{min} = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ чекити болот. Туура жообу б). ◄

23 – МИСАЛ : $f(x) = 2x - 3e^{-x}$ функциясынын.

Жооптор . а) $x_{max} = 0$; б) $x_{min} = 1$; в) $x_{max} = \frac{2}{3}$; г) $x_{min} = \frac{2}{3}$;

д) экстремуму жок .

► ТАБУУ . Туундусун

$f'(x) = (2x - 3\mathrm{e}^{-x})' = 2 - 3\mathrm{e}^{-x} \cdot (-x)' = 2 + 3\mathrm{e}^{-x}$ таап, $\forall x$: $\mathrm{e}^{-x} > 0$ болгондуктан, анын дайыма $f'(x) = 2 + 3\mathrm{e}^{-x} > 0$ нөлдөн чоң болоруна ишенебиз. Анда функциянын стационардык же экстремумга шектелген чекиттери жок.

Туура жообу д) экстремуму жок . ◄

24 – МИСАЛ : Ар бир каптал грандарынын периметрлери 6 см ден, ал эми негизи квадрат болгон тик бурчтуу параллелепипеддер берилген. Алардын ичинен көлөмү боюнча эң чоңун таап, көлөмүн эсептегиле.

Жооптор . а) 1 см., 1см., 1см., $V = 2\text{см}^3$; б) 2см., 2см., 1см., $V = 4\text{см}^3$; в) 1 см., 1см., 3см., $V = 3\text{см}^3$; г) 3 см., 3см., 1см.,

$V = 9\text{см}^3$; д) $\frac{1}{2}$ см., $\frac{1}{2}$ см., 2см., $V = \frac{1}{2}\text{см}^3$.

► ТАБУУ . Айталы тик бурчтуу параллелепипеддин негизи жактары x см болгон квадрат, ал эми бийиктиги (каптал гранынын бийиктиги) $h =$ y см болсун, анда төрт бурчтук формасындагы каптал гранынын жактарынын узундуктарынын $x + x + \text{y} + \text{y} = 2x + 2\text{y}$ суммасы (периметри) $2x + 2\text{y} = 6$ см. Мындан $\text{y} = 3 - x$ байланышы келип чыгат.

Параллелепипеддин көлөмү

$V(x) = S_{\text{нег.}} \cdot h = (x \cdot x) \cdot \text{y} = x^2(3 - x) = 3x^2 - x^3$ функциясынын маанилери катарында табылат. Анын эң чоң V_{max} табуу үчүн, адегенде экстремум x_{max} чекитин табабыз.

Туундусун $V'(x) = (3x^2 - x^3)' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$ эсептесек, анын эки стационардык $V'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x(2 - x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$,

$x_2 = 2$ чекиттери болорун көрөбүз. Алар аркылуу өткөндө $V'(x)$ тин белгилеринин өзгөрүшүн карайлы:

1 - учур.$x_1 = 0$ чекитинде: (Бул учурду карабай койсок да болот, анткени негизинин жактары $x_1 = 0$ см болушу мүмкүн эмес)

а) $x < x_1 = 0$ болсун, анда туундудагы биринчи көбөйтүүчү$3x < 0$ $(-)$ жана экинчиси $2 - x > 0$ $(+)$ белилерине ээ болуп, алардын көбөйтүндүсү катарында $V'(x) < 0$ же $(-)$ белгисине ээ болот.

б) $2 > x > x_1 = 0$ болсун, анда туундудагы биринчи көбөйтүүчү $3x > 0$ $(+)$ жана экинчиси $2 - x > 0$ $(+)$ белилерине ээ болуп, алардын көбөйтүндүсү катарында $V'(x) > 0$ же $(+)$ белгисине ээ болот.

Анда $x_1 = 0$ чекитинен өткөндө туундунун белгиси $(-)$ тан $(+)$ ка алмашып, x_1 min чекити болот.

2 - учур.$x_2 = 2$ чекитинде: а) $0 < x < x_2 = 2$ болсун, анда туундудагы биринчи көбөйтүүчү $3x > 0$ $(+)$ жана экинчиси $2 - x > 0$ $(+)$ белилерине ээ болуп, алардын көбөйтүндүсү катарында

$V'(x) > 0$ же $(+)$ белгисине ээ болот.

$x > x_2 = 2$ болсун, анда туундудагы биринчи көбөйтүүчү $3x > 0$ $(+)$ жана экинчиси $2 - x > 0$ $(-)$ белилерине ээ болуп, алардын көбөйтүндүсү катарында $V'(x) > 0$ же $(-)$ белгисине ээ болот.

Анда $x_2 = 2$ чекитинен өткөндө туундунун белгиси $(+)$ тан $(-)$ ка алмашып, $x_2 = 2$ max чекити болот. Демек, параллелепипеддин негизи жактары 2 см , ал эми бийиктиги у $= 3 - x = 3 - 2 = 1$ см болгондо максималдык көлөмгө ээ болот. Мындан

$V(x) = S_{\text{нег.}} \cdot h = 3x^2 - x^3$ функциясынын максималдык мааниси

$V(2) = 3 \cdot (2)^2 - (2)^3 = 12 - 8 = 4$ саны болору келип чыгат.

Туура жообу: б) 2см, 2см, 1см,$V = 4$см^3.◄

§1.9 Алгачкы функция жана интеграл

1.Функциялардын бардык алгачкы функцияларын тапкыла.

1 – МИСАЛ : $f(x) = x^3 - 6x^2 + x - 1$ функциясынын бардык алгачкы функцияларын тапкыла (§2.27 – оку).

Жооптор . а) $F(x) = x^4 - 6x^3 + x^2 - 1$; б)$F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{x^2}{2} +$

$$+C; \quad \text{в) } F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{x^2}{2} - x + C\ ; \quad \text{г) } F(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + \frac{x^2}{2} + x +$$

$$+C\ ; \quad \text{д)} F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^3 + x + C\ .$$

► ТАБУУ . Элементардык функциялардан анык эмес интеграл алуу таблицасын жана касиеттерин пайдаланып,

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^3 - 6x^2 + x - 1)\,dx = \int x^3\,dx -$$

$$-6\int x^2\,dx + \int x\,dx - \int 1 \cdot dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^2}{2} - x + \ C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ C = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{x^2}{2} - x + \ C\ .$$

Туура жообу в) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{x^2}{2} - x + \mathrm{C}$. ◄

2 – МИСАЛ : $f(x) = \frac{2}{x} + 3\cos x$ функциясынын бардык алгачкы функцияларын тапкыла.

Жооптор . а) $F(x) = 2\ln|x| + 3\sin x + C$; б)$F(x) = \frac{2}{x^2} - 3\sin x + C$;

$$\text{в) } F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\sin x + C\ ; \quad \text{г) } F(x) = \frac{1}{2}x + \sin x + C\ ;$$

$$\text{д) } F(x) = \ln|x| + 3\sin x + C.$$

► ТАБУУ .$F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(\frac{2}{x} + 3\cos x\right)dx = 2\int\frac{1}{x}dx +$
$3\int \cos x\,dx =$

$= 2\ln|x| + 3\sin x + C$келип чыгат. Туура жообу а). ◄

3 – МИСАЛ : $f(x) = \frac{x^2}{3} - sin\,2x$ функциясынын бардык алгачкы функцияларын тапкыла.

Жооптор . а) $F(x) = \frac{x^3}{9} - \cos 2x + C$; б)$F(x) = x^3 - \frac{1}{2}\cos 2x + C$;

в) $F(x) = \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + C$; г) $F(x) = \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{\cos x}{2} + C$;

д)$F(x) = x^3 - \cos 2x + C$.

► ТАБУУ . $F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(\frac{x^2}{3} - sin\,2x\right)dx =$

$$= \int\frac{x^2}{3}dx - \int sin\,2x\,dx = \frac{1}{3}\int x^2\,dx - \frac{1}{2}\int sin\,2x\,d(2x) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} \; - \; \frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{2}\cos 2x + C\;.$$

Туура жообу в) $F(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. ◄

4 – МИСАЛ : $f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$ функциясынын бардык алгачкы функцияларын тапкыла.

Жооптор . а) $F(x) = \frac{2}{3}(x^2 + x)x\sqrt{x} \; + C$; б)$F(x) = \frac{4x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$;

в) $F(x) = x^2\sqrt{x} + \sqrt{x} + C$; г) $F(x) = \dfrac{5x^2\sqrt{x}}{4} + \dfrac{3x\sqrt{x}}{2} + C$;

д)$F(x) = 3x\sqrt{x} + \sqrt{x} + C$.

► ТАБУУ .$F(x) = \int f(x)\,dx = \int(2x + 1)\sqrt{x}\,dx =$

$$\begin{vmatrix} \sqrt{x} = \text{у деп белгилеп} \\ x = \text{у}^2 \;\Rightarrow\; dx = 2ydy \end{vmatrix} =$$

$$= \int (2y^2+1)\cdot y\cdot 2y dy = \int (4y^4+2y^2)\, dy = 4\int y^4 dy + 2\int y^2\, dy =$$

$$= \frac{4y^5}{5} + \frac{2y^3}{3} + C = \frac{4(\sqrt{x})^5}{5} + \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} + C = \frac{4\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C =$$

$= \frac{4x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$. Туура жообу б). ◄

5 – МИСАЛ : $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ функциясынын бардык алгачкы функцияларын тапкыла.

Жооптор . а) $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + C$; б)$F(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + C$;

в) $F(x) = -(x-1)^2 + C$; г) $F(x) = \ln|x-1| + C$;

д)$F(x) = \frac{1}{\ln|x-1|} + C$.

► ТАБУУ. $F(x) = \int f(x)\, dx = \int \frac{x-1}{x^2-2x+1} dx = \left| \begin{matrix} x^2-2x+1= \\ =(x-1)^2 \end{matrix} \right| =$

$= \int \frac{x-1}{(x-1)^2} dx = \int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{d(x-1)}{x-1} = \left| \begin{matrix} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \\ \text{болорун эстеп} \end{matrix} \right| = \ln|x-1| + \mathrm{C}$.

Туура жообу г) $F(x) = \ln|x-1| + C$.◄

2. Функциянын берилген чекит аркылуу өткөн алгачкы функциясын тапкыла.

Жогорудагы мисалдардан көрүнгөндөй функциянын чексиз көп алгачкы функциялары жашап, алар бири – биринен турактуу С санына гана айырмаланып турушат. Ал эми берилген чекит аркылуу өтүүчү алгачкы функция бирөө гана болот.

6 – МИСАЛ : $f(x) = 3x - 5$ функциясынын $\mathrm{M}(4;\ 10)$ чекити аркылуу өткөн алгачкы функциясын тапкыла.

Жооптор . а) $F(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + 6$; б)$F(x) = 3x^2 - 5x + 18$;

в) $F(x) = \frac{2x^2}{3} - 5x - 6$; г) $F(x) = \frac{3x^2}{2} + 5x + 14$;

д) $F(x) = x^3 - 5x - 34$.

► ТАБУУ. $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x-5)\,dx = \frac{3x^2}{2} - 5\,x + \mathrm{C}$ алгачкы функцияларынын тобуна ээ болобуз. Эгерде $F(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + \mathrm{C}$ алгачкы функциясы, берилген$\mathrm{M}(4;10) = \mathrm{M}(x_0;\ \mathrm{y}_0)$ чекити аркылуу өтсө, анда $\mathrm{y}_0 = F(x_0)$ шарты аткарылат, анткени $\mathrm{M}(x_0;\ \mathrm{y}_0)$ чекити $F(x)$тин графигинде жайгашкан. Мындан каалагандай эле маанилерди алууга мүмкүнчүлүгү бар С турактуусунун бир гана

$\mathrm{y}_0 = F(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \frac{3\cdot 4^2}{2} - 5\cdot 4 + \mathrm{C} \Rightarrow 10 = 24 - 20 + \mathrm{C} \quad \Rightarrow$

$\mathrm{C} = 6$ маанисин таап, табууну талап кылган алгачкы функцияны $F(x) = \frac{3x^2}{2} - 5x + 6$ көрүнүшүндө жазабыз.

Туура жообу а). ◄

7 – МИСАЛ : $f(x) = \sin 2x$ функциясынын $\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{2};\ 5\right)$ чекити аркылуу өткөн алгачкы функциясын тапкыла.

Жооптор . а) $F(x) = -2\cos 2x + 3$; б) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + 5\frac{1}{2}$;

в) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 4\frac{1}{2}$; г) $F(x) = \frac{1}{2}\cos x + 15$;

д) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos x + 5.$

ТАБУУ. $F(x) = \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, d(2x) = -\ \frac{1}{2}\cos 2x + \mathrm{C}$ алгачкы функцияларынын тобуна ээ болобуз. Эгерде $F(x) = -\ \frac{1}{2}\cos 2x + \mathrm{C}$ алгачкы функциясы, берилген$\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{2};\ 5\right) = \mathrm{M}(x_0;\ \mathrm{y}_0)$ чекити аркылуу өтсө, анда $\mathrm{y}_0 = F(x_0)$ шарты аткарылат, анткени $\mathrm{M}(x_0;\ \mathrm{y}_0)$ чекити $F(x)$ тин графигинде жайгашкан. Мындан чексиз көп маанилерди кабыл алганга укугу бар С турактуу санынын бир гана

$\mathrm{y}_0 = F(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 5 = -\ \frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{C} \Rightarrow 5 = -\ \frac{1}{2}\cos\pi + \mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C} = 5 + \ \frac{1}{2}\cos\pi = 5 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ маанисин таап, табууну талап кылган алгачкы функцияны $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 4\frac{1}{2}$ көрүнүшүндө жазабыз. Туура жообу в). ◀

8 – МИСАЛ : $f(x) = \frac{6}{(4-3x)^2}$ функциясынын $\text{M}(1{,}5;\ 1)$ чекити аркылуу өткөн алгачкы функциясын тапкыла.

Жооптор . а) $F(x) = \frac{2}{(3x-4)^2} - 15$;   б) $F(x) = \frac{2}{4-3x} + 5$;

$$\text{в) } F(x) = \frac{2}{3x-4} - 3\ ; \quad \text{г) } F(x) = \frac{6}{(4-3x)^3} + 3\ ; \quad \text{д) } F(x) = \frac{6}{(4-3x)^2} - 5.$$

ТАБУУ. $F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{6}{(4-3x)^2}\,dx = \begin{vmatrix} \text{y} = 4-3x \ \Rightarrow \\ x = \frac{1}{3}(4-\text{y}) \\ dx = -\frac{1}{3}d\text{y} \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{6}{\text{y}^2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)d\text{y} = -2\int \frac{d\text{y}}{\text{y}^2} = -2\int \text{y}^{-2}\,d\text{y} = -2\cdot\frac{\text{y}^{-2+1}}{-2+1} + \text{C} =$$

$$= -2\cdot\frac{\text{y}^{-1}}{-1} + \text{C} = \frac{2}{\text{y}} + \text{C} = \frac{2}{4-3x} + \text{C}$$

алгачкы функцияларынын тобуна ээ болобуз. Эгерде $F(x) = \frac{2}{4-3x} + \text{C}$ алгачкы функциясы, берилген $\text{M}(1{,}5;\ 1) = \text{M}(x_0;\ \text{y}_0)$ чекити аркылуу өтсө, анда $\text{y}_0 = F(x_0)$ шарты аткарылат, анткени $\text{M}(x_0;\ \text{y}_0)$ чекити $F(x)$ тин графигинде жайгашкан. Мындан чексиз көп маанилерди кабыл алганга укугу бар С турактуу санынын бир гана

$\text{y}_0 = F(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2}{4-3\cdot 1{,}5} + \text{C} \Rightarrow 1 = \frac{2}{-0{,}5} + \text{C} \ \Rightarrow$

$\text{C} = 1 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$маанисин таап, табууну талап кылган алгачкы

функцияны $F(x) = \frac{2}{4-3x} + 5$ көрүнүшүндө жазабыз. Туура жообу б).◀

9 – МИСАЛ : $\text{M}\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)$ чекити аркылуу өткөн $f(x) = 2\sin 5x + 3\cos\frac{x}{2}$ функциясынын алгачкы функциясын тапкыла.

Жооптор . а) $F(x)=\frac{2}{5}\cos 5x+3\cos\frac{x}{2}+1$; б) $F(x)=\frac{2}{5}\sin x-6\cos x+3$; в) $F(x)=6\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos 5x-2\frac{4}{5}$; г) $F(x)=-\frac{2}{5}\cos x-6\sin x-3$; д) $F(x)=-5\cos 2x+2\cos\frac{x}{3}-2\frac{1}{3}$.

ТАБУУ. $F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(2\sin 5x+3\cos\frac{x}{2}\right)dx=\int 2\sin 5x\,dx+$

$$+\int 3\cos\frac{x}{2}dx=\frac{2}{5}\int\sin 5x\,d(5x)+6\int\cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=$$

$=-\frac{2}{5}\cos 5x+\ 6\sin\frac{x}{2}+\ C$ алгачкы функцияларына ээ болобуз.

Алардын арасынан берилген $\mathrm{M}\left(\frac{\pi}{3};\ 0\right)=\mathrm{M}(x_0;\ y_0)$ чекити аркылуу өткөн алгачкы функция, $y_0=F(x_0)$ шартына баш ийет, анткени $\mathrm{M}(x_0;\ y_0)$ чекити $F(x)$ тин графигинде жайгашкан. Мындан чексиз көп маанилерди кабыл алганга укугу бар C турактуу санынын бир гана

$y_0=F(x_0)\quad\Leftrightarrow\quad 0=-\frac{2}{5}\cos 5\frac{\pi}{3}+\ 6\sin\frac{\frac{\pi}{3}}{2}\ +\mathrm{C}\Rightarrow$

$\mathrm{C}=\frac{2}{5}\cos 5\frac{\pi}{3}-\ 6\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-\ 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}-3=-\frac{14}{5}=-2\frac{4}{5}$
маанисин табабыз. Анда изделген алгачкы функцияны

в) $F(x)=6\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{5}\cos 5x-2\frac{4}{5}$ көрүнүшүндө жазууга болот.

Туура жообу в). ◄

3. Анык интегралдарды эсептегиле.

10 – МИСАЛ : $\int_{-3}^{2}(2x-3)\,dx$ интегралын эсепте.

Жооптор . а) 16 ; б) -16 ; в) -20 ; г) 20 ; д) 19 .

►ЭСЕПТӨӨ . Анык интегралды эсептөө үчүн, интеграл алдындагы функциянын алгачкы $F(x)$ функциясын таап, андан кийин Ньютон – Лейбництин

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

формуласын колдонуп, анык интегралдын сандык маанисин эсептейбиз.

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (2x-3)\,dx = 2\frac{x^2}{2} - 3x + \mathrm{C}.$

Анда $\int_{-3}^{2}(2x-3)\,dx = F(b) - F(a) = F(2) - F(-3) = 2\cdot\frac{2^2}{2} - 3\cdot 2 -$

$-\left(2\cdot\frac{(-3)^2}{2} - 3\cdot(-3)\right) = 4 - 6 - (9+9) = -20$ келип чыгат.

Туура жообу в). ◄

11 – МИСАЛ : $\int_0^2 e^{3x}\,dx$ интегралын эсепте.

Жооптор . а) $\frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3}e$; б) $3e$; в) $2e$; г) $\frac{1}{3}(e^6-1)$; д) $3e-1$.

►ЭСЕПТӨӨ . $F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}\,d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \mathrm{C}$.
Анда Ньютон – Лейбництин формуласы боюнча

$$\int_0^2 e^{3x}\,dx = F(b) - F(a) = F(2) - F(0) =$$

$= \frac{1}{3}e^{3\cdot 2} - \frac{1}{3}e^{3\cdot 0} = \frac{1}{3}(e^6 - e^0) = \frac{1}{3}(e^6 - 1)$ ээ болобуз.

Туура жообу г). ◄

12 – МИСАЛ : $\int_{-1}^{2}(x^2 - 6x + 9)\,dx$ интегралын эсепте.

Жооптор . а) 27; б) 24; в) 18; г) 21 ; д) 23 .

►ЭСЕПТӨӨ . $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^2 - 6x + 9)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} +$

$+ 9x + C = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C$ ээ болуп, Ньютон – Лейбництин формуласы боюнча

$$\int_{-1}^{2}(x^2 - 6x + 9)\,dx = F(b) - F(a) = F(2) - F(-1) =$$

$= \frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + \ 9 \cdot 2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 3 \cdot (-1)^2 + \ 9 \cdot (-1)\right) = \frac{2^3}{3} - 12 + 18 -$

$- \frac{-1}{3} + 3 + 9 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 18 = 21$ жообун алабыз.

Туура жообу г) 21. ◀

13 – МИСАЛ : $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx$ интегралын эсепте.

Жооптор . а) $8\frac{2}{3}$; б) $9\frac{1}{3}$; в) $7\frac{1}{2}$; г) $7\frac{5}{6}$; д) $7\frac{2}{3}$.

►ЭСЕПТӨӨ . $F(x) = \int f(x)\, dx = \int \sqrt{2x+1}\, dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx =$

$$= \frac{1}{2} \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} d(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \mathrm{C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} =$$

$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x+1)^3} + \mathrm{C}$ ээ болуп, Ньютон – Лейбництин формуласы боюнча

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx = F(b) - F(a) = F(4) - F(0) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2 \cdot 4 + 1)^3} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2 \cdot 0 + 1)^3} =$$

$= \frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$жообун алабыз. Туура жообу а) $8\frac{2}{3}$. ◀

14 – МИСАЛ : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx$ интегралын эсепте.

Жооптор . а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $1\frac{1}{2}$; г) -1 ; д) $-\frac{1}{2}$.

►ЭСЕПТӨӨ . $F(x) = \int f(x)\, dx = \int \sin x \cos x\, dx =$

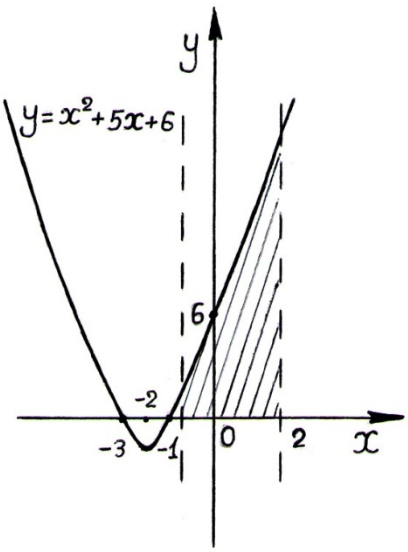
$= \int \sin x\, d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C$. Мындан берилген анык интегралдын сандык мааниси

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx = F(b) - F(a) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin^2 0}{2} =$$

$= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$ болорун көрөбүз. Туура жообу б) $\frac{1}{2}$. ◄

4. Ийрилер менен чектелген фигуралардын аянттарын тапкыла

15 – МИСАЛ : $f(x) = x^2 + 5x + 6$ функциясынын графиги менен $x = -1,\ x = 2$ түздөрү жана Ox огу менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (1.35 – чийме).



1.35-чийме

Жооптор .
а) 25; б) 28; в) 28,5; г)27,5 ; д)26 .

►ЭСЕПТӨӨ . Эсептөөнү талап кылгын фигуранын аянты

$S = \int_{-1}^{2}(x^2 + 5x + 6)\,dx$ анык интегралынын мааниси болору белгилүү. Ошондуктан берилген $f(x) = x^2 + 5x + 6$функциясынын алгачкы $F(x) = \int f(x)\,dx$ функциясын аныктап, Ньютон – Лейбництин формуласы$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$боюнча анык интегралды эсептейбиз. Анда алгачкы функция

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^2 + 5x + 6)\,dx = \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 6x + C$

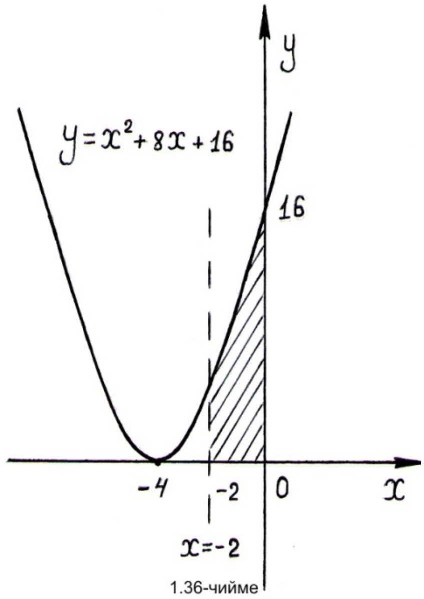
көрүнүшүндө табылып,

$$S = \int_{-1}^{2}(x^2 + 5x + 6)\,dx = F(2) - F(-1) = \frac{2^3}{3} + 5\frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2 - \frac{(-1)^3}{3} -$$

$$-133 - 5 \cdot \frac{(-1)^2}{2} - 6 \cdot (-1) = \frac{8}{3} + 10 + 12 - \frac{-1}{3} - \frac{5}{2} + 6 =$$

$= \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + 28 - \frac{5}{2} = 31 - \frac{5}{2} = \frac{57}{2} = 28{,}5$. Туура жообу в). ◄

16– МИСАЛ : $f(x) = x^2 + 8x + 16$ функциясынын графиги менен $x = -2$ түзү жана Ox,Oyоктору менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (1.36 – чийме).



1.36-чийме

Жооптор .

а) 18;   б) 24;   в) $17\frac{1}{3}$;   г)$18\frac{2}{3}$;   д)20

►ЭСЕПТӨӨ . Берилген функциянын алгачкы функциясын табалы

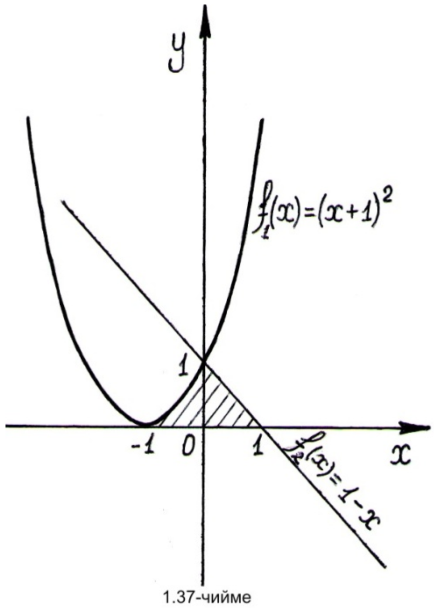
$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^2 + 8x + 16)\,dx = \frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + 16x + C$. Анда изделүүчү аянт

$$S = \int_{-2}^{0} (x^2 + 8x + 16)\ dx = F(0) - F(-2) = \frac{0^3}{3} + 8\frac{0^2}{2} + 16 \cdot 0 -$$

$$-\left(\frac{(-2)^3}{3} + 8\frac{(-2)^2}{2} + 16 \cdot (-2)\right) = \frac{8}{3} - 8\frac{4}{2} + 32 = \frac{8}{3} - 16 + 32 = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$$

аянт бирдигине барабар болот. Туура жообу г)$18\frac{2}{3}$. ◄

17 – МИСАЛ : $f_1(x) = (x+1)^2,\ f_2(x) =$ $= 1 - x$ функцияларынын графиктери жана $0x$ абциссасы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (1.37 – чийме).



1.37-чийме

Жооптор .

а) $\frac{5}{6}$;   б) $\frac{2}{3}$;   в) $1\frac{1}{6}$;   г)1;   д)$1\frac{1}{3}$.

►ЭСЕПТӨӨ . Берилген фигуранын чек ара түздөрүн жана чекиттерин аныктоо үчүн, чек ара ийрилеринин өз ара кесилишүү чекиттери менен кошо $0x$ абсцисса огу менен кесилишүү чекиттерин аныктайбыз.

1) $f_1(x),\ f_2(x)$экөөсүнүн кесилишин табалы: $f_1(x) = f_2(x)$⇨

$$(x+1)^2 = 1-x \;\Rightarrow\; x^2+2x+1 = 1-x \;\Rightarrow\; x^2+3x=0 \;\Rightarrow$$

$x(x+3)=0 \;\Rightarrow\; x=0,\ x=-3$ чекиттеринде кесилишерин көрөбүз.

2) $0x$ абсцисса огу менен кесилиш чекиттерин табалы:

а) $f_1(x)$ менен $0x$ огу $y=0$ же $f_1(x)=0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)^2=0 \Rightarrow$

$x=-1$;

б) $f_2(x)$ менен $0x$ огу $y=0$ же $f_2(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 1-x=0 \Rightarrow x=1$ чекиттеринде кесилишет. Анда $-1 \le x \le 1$ аралыгында $f_1(x),\ f_2(x)$ функцияларынын графиктери менен чектелген фигуранын аянтын эсептейбиз. Бул фигуранын аянтын эки бөлүктүн аянттарынын суммасы катарында эсептеп,

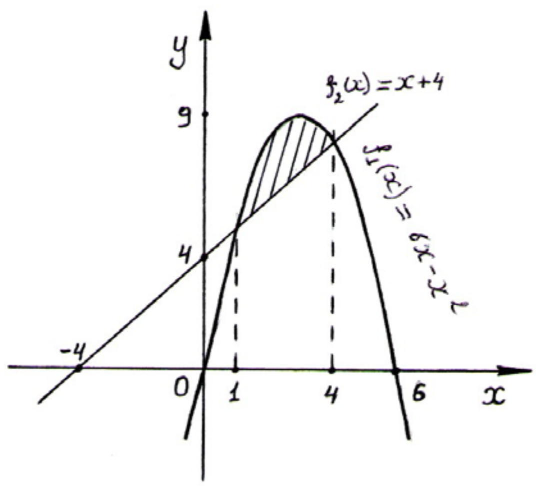
$$S = \int_{-1}^{0} f_1(x)\ dx + \int_{0}^{1} f_2(x)\ dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\ dx + \int_{0}^{1} (1-x)\ dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+1)^2\ d(x+1) - \int_{0}^{1} (1-x)\ d(1-x) =$$

$$= \left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{(1-x)^2}{2}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

жообуна ээ болобуз. Туура жообу

а) $\frac{5}{6}$. ◄



1.38-чийме

18 – МИСАЛ : $f_1(x)=6x-x^2$, $f_2(x)=x+4$ функцияларынын графиктери менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (1.38 – чийме).

Жооптор .

а) 9,5; б) 4,5; в) 4; г) 5;

д) 5,5 .

►ЭСЕПТӨӨ . Эки функциянын кесилишүү чекиттерин табалы:

$f_1(x) = f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 6x - x^2 = x + 4 \Rightarrow \quad -x^2 + 5x - 4 = 0$

$-x^2 + 5x - 4 = 0$ квадраттык теңдемесинин

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-5 \pm 3}{-2},$$

$x_1 = \frac{-5+3}{-2} = 1$ жана $x_2 = \frac{-5-3}{-2} = 4$ чечимдери кесилишүү чекиттеринин абсциссалары болушат.

Бул учурда изделүүчү аянт

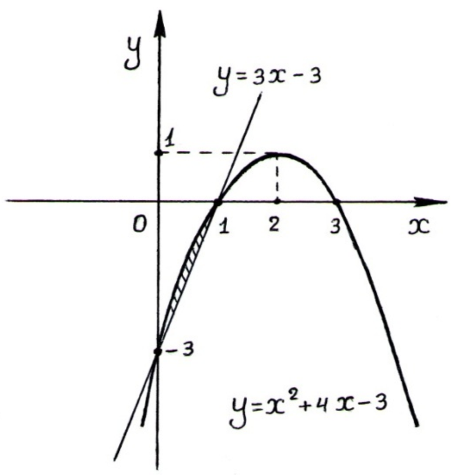
$$S = \int_1^4 f_1(x)\, dx - \int_1^4 f_2(x)\, dx = \int_1^4 (6x - x^2)\, dx - \int_1^4 (x+4)\, dx =$$

$$= \int_1^4 (6x - x^2 - x - 4)\, dx = \left(\frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x \right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{6 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 4 \cdot 4 - \left(\frac{6}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 4 \right) =$$

$= 48 - \frac{64}{3} - \frac{16}{2} - 16 - 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4 = 25 - \frac{123}{6} = \frac{27}{6} = 4{,}5$ аянт бирдигине барабар болот. Туура жообу б) 4,5 .◄

19 – МИСАЛ : $f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$ функциясынын графиги жана $(1;\ 0),\ (0;\ -3)$ чекиттери аркылуу өткөн түз менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (1.39–чийме).



1.39-чийме

Жооптор .
а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{2}{3}$.

►ЭСЕПТӨӨ . $f_1(x) = -x^2 + 4x - 3$ функциясынын графиги бутактары төмөн караган парабола болот, анткени $a = -1 < 0$.

Oxогу менен$-x^2+4x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$
$\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)}}{-2}=$

$=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{-2}=\frac{-4\pm 2}{-2}$, $x_1=\frac{-4+2}{-2}=1$, $x_2=\frac{-4-2}{-2}=3$ чекиттеринде кесилишет.

Берилген эки $(1;\ 0)$, $(0;\ -3)$ чекиттери аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{0-1}=\frac{y-0}{-3-0} \quad \Leftrightarrow \quad y=3x-3$ же $f_2(x)=3x-3$ көрүнүшүндө болот.

Парабола менен $f_2(x)=3x-3$ түзү кесилишерин изилдейли:

$-x^2+4x-3=3x-3 \Rightarrow -x^2+x=0 \quad \Rightarrow \quad x(-x+1)=0 \quad \Rightarrow$

$x=0,\ \ x=1$. Мындан аянтын табуу талап кылынган фигура

$0\le x\le 1$ кесиндисинде $f_1(x)=-x^2+4x-3$ параболасы менен $f_2(x)=3x-3$ түзүнүн арасында чектелген фигура болот деген тыянакка келебиз. Анда изделүүчү аянт $S=\int_0^1[f_1(x)-f_2(x)]\,dx$ формуласы менен эсептелет. Биздин учурда

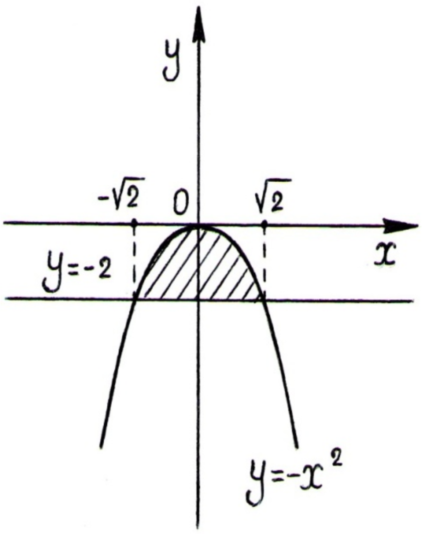
$$S=\int_0^1(-x^2+4x-3-3x+3)\ dx=$$

$$=\int_0^1(-x^2+x)\ dx=$$

$$=\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{-1^3}{3}+\frac{1^2}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

жообу келип чыгат.

Туура жообу в) $\frac{1}{6}$.◄



1.40-чийме

20 – МИСАЛ : $f(x)=-x^2$

функциясынын графиги жана $y=-2$ түзү менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле (1.40– чийме).

Жооптор . а) $\frac{8}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; г) $\sqrt{2}$; д) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

►ЭСЕПТӨӨ . Берилген функция менен түздүн кесилиш чекиттерин табуу үчүн аларды теңдеп, $-x^2=-2 \;\Leftrightarrow\; x^2=2 \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt{2}$ маанисине ээ болобуз. Анда изделүүчү фигуранын аянты

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}[f(x)-y]\,dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}[-x^2-(-2)]\,dx=$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}[-x^2+2]\,dx=\left|\begin{matrix}\text{жуп}\\ \text{функция}\end{matrix}\right|=2\int_{0}^{\sqrt{2}}[-x^2+2]\,dx=$$

$$=2\left(\frac{-x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=2\left(\frac{-(\sqrt{2})^3}{3}+2\sqrt{2}\right)=2\cdot\frac{-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

аянт бирдигине барабар болот. Туура жообу д) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. ◄

§ 1.10 Бышыктоо

1. Эсептегиле.

1 – МИСАЛ : $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{10}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$.

Жооптор а) $\sqrt{10}$; б) 10 ; в) 100 ; г) 20 ; д) 50 .

►ЭСЕПТӨӨ . $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}=(2\cdot 5)^{\frac{1}{4}}\cdot(8\cdot 5)^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}=$

$$=2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=2^1\cdot 5^1=2\cdot 5=10 .$$

Туура жообу 10 .◄

2 – МИСАЛ : $7^{0,5\log_7 9}$.

Жооптор а) 9 ; б) 7 ; в) 3 ; г) 81 ; д) 49 .

ЭСЕПТӨӨ . $7^{0,5\log_7 9} = 7^{\log_7 9^{0,5}} = 7^{\log_7 9^{\frac{1}{2}}} = 7^{\log_7 \sqrt{9}} = 7^{\log_7 3} = 3$ келип чыгат, анткени логарифмдин аныктамасынан келип чыккан

$a^x = b \;\Leftrightarrow\; x = \log_a b \;\Rightarrow\; a^{\log_a b} = b$ касиетин пайдаландык. Туура жообу в) 3 . ◄

3 – МИСАЛ : $\sqrt{5}\left(\log_2 12 - \log_2 3 + 3^{\log_3 8}\right)^{0,5\ \lg 5}$.

Жооптор а) $\sqrt{5}$; б) 5 ; в) $2\sqrt{5}$; г) 10 ; д) $\sqrt{10}$.

►ЭСЕПТӨӨ . $\sqrt{5}\left(\log_2 12 - \log_2 3 + 3^{\log_3 8}\right)^{0,5\ \lg 5} =$

$$= \sqrt{5}\left(\log_2 \frac{12}{3} + 8\right)^{\frac{1}{2}\lg 5} = \sqrt{5}(\log_2 4 + 8)^{\lg\sqrt{5}} = \sqrt{5}(2+8)^{\lg\sqrt{5}} =$$

$= \sqrt{5} \cdot 10^{\lg\sqrt{5}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ ээ болобуз. Мында негиздери бирдей логарифмдердин $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ касиети жана $a = 10$ болгондо, ондук логарифм $\log_{10} 5 = \lg 5$ көрүнүшүндө жазылары жана $10^{\lg\sqrt{5}} = \sqrt{5}$касиети аткарылары эске алынды.

Туура жообу б) 5 . ◄

4 – МИСАЛ : $\frac{\sin 110^0 \sin 250^0 \ +\ \cos 540^0 \cos 290^0 \cos 430^0}{cos^2 1620^0}$.

Жооптор а) 1 ; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -1 ; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

►ЭСЕПТӨӨ . $\pi = 180^0$, $\frac{\pi}{2} = 90^0$ болорун эске алып, тригонометриялык туюнтманы келтирүүнүн формуласын колдонууга ылайыкташтырып жазып,

$$\frac{\sin 110^0 \sin 250^0 \ \ +\ \ \cos 540^0 \cos 290^0 \cos 430^0}{cos^2 1620^0} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 20^0\right)\sin(\pi + 70^0) \ \ +\ \ \cos 3\pi \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 20^0\right)\cos(2\pi + 70^0)}{cos^2 9\pi}$$

$$=$$

$$=\frac{\cos 20^0\cdot\ (-\sin 70^0)\ \ +\ \ (-1)\ \cdot\ \sin 20^0 \cos 70^0}{(-1)^2}=$$

$$=-(\sin 70^0\cdot\cos 20^0\ +\ \cos 70^0\cdot\sin 20^0)=$$

$=-\sin(70^0+20^0)=-\sin 90^0=-1$. Туура жообу г) -1 . ◄

2.Туюнтмаларды жөнөкөйлөткүлө

5 – МИСАЛ : $\frac{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$ туюнтмасын.

Жооптор а) a ; б) b ; в) $a^{\frac{1}{2}}$; г) $a^{\frac{1}{4}}$; д) $b^{\frac{1}{2}}$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ. $\frac{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}\ +\ b^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\ +\ b^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\ +\ b^{\frac{1}{4}}}=$

$$=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}\ .$$

Туура жообу в) $a^{\frac{1}{2}}$.◄

6 – МИСАЛ : $\frac{\sin 2\alpha+\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha}$туюнтмасын.

Жооптор а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $2\sin\alpha$; г) $2\cos\alpha$; д) $\cos 2\alpha$.

►ЖӨНӨКӨЙЛӨТҮҮ. $\frac{\mathrm{Sin}\,2\alpha+\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+\ \cos\alpha}{1+2\sin\alpha}=$

$=\frac{\cos\alpha(1+2\sin\alpha)}{1+2\sin\alpha}=\cos\alpha$.

Туура жообу а) $\cos\alpha$. ◄

3.Теңдемелерди чыгаргыла.

7 – МИСАЛ : $\log_3(12-5x)=2$ теңдемесин.

Жооптор а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{6}{5}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $\frac{3}{5}$; д) 1 .

►ЧЫГАРУУ . Логарифмдик функция жашашы үчүн, табылуучу чечимге $12-5x>0$ же $x<\frac{12}{5}=2{,}4$ шарты коюлат (ЧЖА).

Анда $\log_3(12-5x)=2 \quad \Leftrightarrow \quad 12-5x=3^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5x=12-9 \quad \Leftrightarrow$

$5x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{5}$ чечими табылып, ЧЖА нын шартын канааттандырат. Текшерүү:

$\log_3(12-5x) \Rightarrow \log_3\left(12-5\cdot\frac{3}{5}\right)=\log_3(9)=2,$

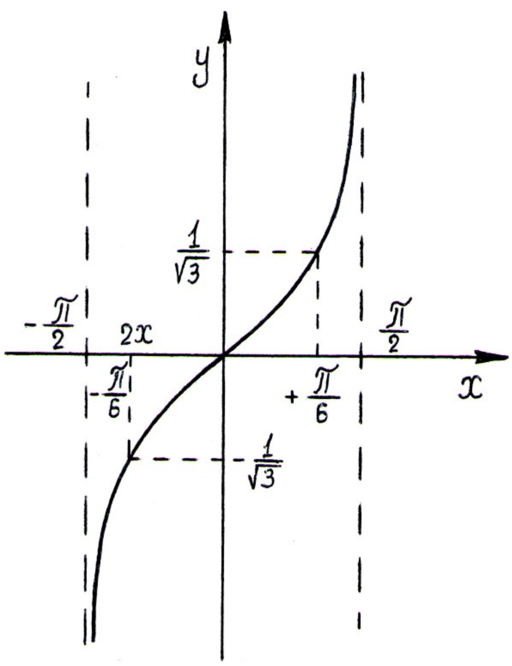
анда туура жообу г) $\frac{3}{5}$. ◄

8 – МИСАЛ : $\sqrt{3}\, tg\, 2x+1=0$ теңдемесин.

Жооптор а) $\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$; в) $\frac{\pi}{3}+2k\pi,$

$k\in Z$; г) $-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{2}k,\quad k\in Z$; д) $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\quad k\in Z$.

►ЧЫГАРУУ .$\sqrt{3}tg\, 2x+1=0 \quad \Rightarrow tg\, 2x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ теңдемесинин чечими, тангенс функциясынын графигинде жайгашып, ординатасы “$-\frac{1}{\sqrt{3}}$” санына барабар чекитке туура келген $2x$ абсциссасы болот (1.41 – чийме). Анда



1.41-чийме

$2x=arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+k\pi,\ k\in Z \quad \Rightarrow$

$2x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in Z \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,$ $k\in Z$ жообуна ээ болобуз.

Берилген тригонометриялык теңдеменин ЧЖА сы сан огундагы

$2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z \quad \Rightarrow \quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$ чекиттеринен башка бардык чекиттер болушуп, табылган чечим ЧЖА нын шарттарына баш ийет.

Туура жообу г) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z.$ ◄

9 – МИСАЛ : $5^{4x-1}+5^{3x+1}=5^x+25$ теңдемесин.

Жооптор а) $3,\ -2$; б) $\frac{1}{3},-2$; в) $\frac{1}{3}$; г) -2 ; д) $3,\ 2$.

►ЧЫГАРУУ . 5 санын даражага көтөрүүгө чек коюлбагандыктан, теңдеменин ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

$$5^{4x-1} + 5^{3x+1} = 5^x + 25 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5^{4x}}{5} + 5^{3x} \cdot 5 = 5^x + 5^2 \quad \Rightarrow$$

теңдемени $5 \neq 0$санына көбөйтүп,

$5^{4x} + 5^{3x} \cdot 5^2 = 5^x \cdot 5 + 5^3 \quad \Rightarrow \quad 5^{4x} + 25 \cdot 5^{3x} - 5 \cdot 5^x - 125 = 0$ теңдемесине ээ болобуз. Мындан $y = 5^x$, $y > 0$ белгилөөсүн киргизсек, берилген көрсөткүчтүү теңдеме

$y^4 + 25y^3 - 5y - 125 = 0$көрүнүшүндөгү алгебралык теңдемеге теңдеш өзгөртүлүп түзүлөт. Анын сол жагын

$$y^4 + 25y^3 - 5y - 125 = y^3(y + 25) - 5(y + 25) =$$

$= (y^3 - 5)(y + 25)$көбөйтүндүсү катарында жазып, акыркы алгебралык теңдемени $(y^3 - 5)(y + 25) = 0$ теңдемесине келтиребиз. Эки сандын көбөйтүндүсүнүн нөлгө тең болушу үчүн, алардын бирөөсүнүн нөлгө тең болушу жетиштүү болгондуктан:

1) $y^3 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{5}$;

2) $y + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -25$ келип чыгып, $y = -25 < 0$ болгондуктан белгилөө шартына туура келбейт.

Ошондуктан $y = \sqrt[3]{5}$ деп алып, $\Rightarrow \quad 5^x = \sqrt[3]{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$ деген жоопту алабыз. Туура жообу в) $\frac{1}{3}$.◄

10 – МИСАЛ : $8 - 3x = \sqrt{x + 2}$ теңдемесин.

Жооптор а) 2, $\frac{31}{9}$; б) 2 ; в) $\frac{31}{9}$; г) -2 , 3 ; д) -2 , 3 .

►ЧЫГАРУУ . Теңдеменин сол жагы квадраттык тамырдын мааниси катары $8 - 3x \geq 0$ оң сан, ал эми оң жагындагы тамыр алдындагы туюнтма катары $x + 2 \geq 0$ оң сан болушу керек. Анда теңдеменин

ЧЖА сы $\begin{cases} 8-3x \geq 0\,, \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x \geq \frac{8}{3}\,, \\ x \geq -2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x \geq \frac{8}{3} = 3\frac{2}{3}$ шарттарына баш ийген $\left[3\frac{2}{3},\ +\infty\right)$ аралыгы болот.

Теңдемени иррационалдыктан куткаруу үчүн, эки жагын тең квадратка көтөрүп квадраттык теңдемеге келтиребиз. Анын

$(8-3x)^2 = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8^2 - 2\cdot 8\cdot 3x + (3x)^2 = x+2,$

$$9\,x^2 - 49x + 62 = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b\ \pm\ \sqrt{b^2\ -\ 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{49 \pm\ \sqrt{49^2 -\ 4\ \cdot\ 9\ \cdot 62}}{18} =$$

$= \frac{49\pm\sqrt{2401-2232}}{18} = \frac{49\pm\sqrt{169}}{18} = \frac{49\pm 13}{18}\,,\ \ x_1 = \frac{49+13}{18} = \frac{62}{18} = \frac{31}{9},$

$x_2 = \frac{49-13}{18} = \frac{36}{18} = 2$чечимдерин таап, $x_2 = 2$ЧЖА га кирбегендиктен, туура чечим катары $\frac{31}{9}$ санын алабыз. Туура жообу в) . ◄

11 – МИСАЛ : $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 0$ теңдемесин.

Жооптор а) $2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$; б) $\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$;

в) $\frac{\pi}{2}k,\quad \frac{\pi}{6} + k\pi,\quad k \in Z$; г)$4\pi k,\quad \pm\frac{4\pi}{3} + 4k\pi,$
$k \in Z$; д) $\pi k,\quad \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\quad k \in Z$.

►ЧЫГАРУУ . Косинус функциясынын аныкталуу областы болгон бүтүндөй сан огу, теңдеменин ЧЖА сы болот. Берилген теңдемени

$\cos\frac{x}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} - \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + 1 - \cos^2\frac{x}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} + 1 = 0$$

көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп түзүп, $y = \cos\frac{x}{2}$ белгилөөсүн киргизели, анда $\left|\cos\frac{x}{2}\right| \le 1$ болгондуктан $|y| \le 1$ деген чектөө коюлган

$-2y^2 + y + 1 = 0$ квадраттык теңдемеси келип чыгат. Анын

$$-2y^2 + y + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{-4} =$$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4}$ чечимдери $y_1 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$ менен$y_2 = \frac{-1-3}{-4} = 1$ сандары болушат. Табылган эки чечим тең ЧЖА га киргендиктен:

1) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$ теңдемесинин чечимдери бирдик айланага таандык абциссасы "$-\frac{1}{2}$" болгон чекитке туура келген борбордук $\frac{x}{2}$ бурчу болот (1.28 – чийме). Мындай чекиттер экөө болгондуктан k жолу толук айланууларды эске алып,

$$\frac{x}{2} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in Z \quad \Rightarrow\; x = \pm\frac{4\pi}{3} + 4k\pi,$$

$k \in Z$чечимдерин табабыз.

2) $\cos\frac{x}{2} = 1$ теңдемесинин чечимдери бирдик айланага таандык абциссасы "-1" болгон чекитке туура келген борбордук $\frac{x}{2}$ бурчу болот. Мындай чекиттер бирөө гана болгондуктан, ага туура келүүчү борбордук бурч да бирөө $\frac{x}{2} = 0^0$ болот. Анда k жолу толук айланууларды эске алып, $\frac{x}{2} = 2k\pi,\ k \in Z \quad \Rightarrow \quad x = 4k\pi,\ k \in Z$ чечимдерин табабыз.

Эки учурду бириктирип, берилген теңдеме г) $4\pi k, \quad \pm\frac{4\pi}{3} + 4k\pi,$ $k \in Z$ чечимдерине ээ болот деген туура жоопту беребиз. ◄

12 – МИСАЛ : $\cos x = \cos 3x + 2\sin 2x$ теңдемесин.

Жооптор а) $\frac{\pi}{2}k,\ k \in Z;$ б) $\frac{\pi}{2}k + 2k\pi,\ k \in Z$; в) $\frac{\pi}{2}k,\ (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi,$ $k \in Z$; г) $\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$; д) $\pi k,\ \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$.

►ЧЫГАРУУ . Косинустардын айырмасынын формуласын колдонуп,

$\cos x - \cos 3x = \sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{x-3x}{2} = \sin 2x \cdot \sin(-x) = -\sin 2x \cdot \sin x$ көрүнүшүнө келтиребиз. Анда берилген теңдеме

$\cos x = \cos 3x + 2\sin 2x \Leftrightarrow 2\sin 2x + \sin 2x \cdot \sin x = 0 \Leftrightarrow \ \sin 2x \cdot (2 + \sin x) = 0$ абалына теңдеш өзгөртүлгөн болот.

Көбөйтүндү нөлгө барабар болушу үчүн көбөйүүчүлөрдүн бирөөсүнүн нөлгө тең болушу жетиштүү болгондуктан:

1)$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$ бирдик айланадагы ординатасы 0 болгон чекитке туура келген борбордук $2x$ бурчуэкөө 0, π , анда чечимди k жолу толук айланууларды эске алганда

$2x = k\pi,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$ деп жазууга болот.

2) $2 + \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \sin x = -2$ теңдемесинин чечими бош көптүк, анткени $\sin x$ функциясы$|\sin x| \leq 1 \quad \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$ шартына баш ийгендиктен “-2” санына барабар болушу мүмкүн эмес.

Эки учурду бириктирип, а) $\frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$ туура чечимдерине ээ болобуз. ◄

4. Барабарсыздыктарды чыгаргыла.

13 – МИСАЛ : $1 < 10^x \leq 1000\,000$ барабарсыздыгын.

Жооптор а) $(-\infty,\ 6]$; б) $(1, +\infty)$; в) $(1,\ 5]$;

г) $(-1,\ 5]$; д) $(0,\ 6]$.

►ЧЫГАРУУ . 10 санын даражага көтөрүүгө чектөө коюлбагандыктан, барабарсыздыктын ЧЖА сы бүтүндөй сан огу болот.

$1 < 10^x \leq 1000\,000 \quad \Leftrightarrow \quad 10^0 < 10^x \leq 10^6 \quad \Rightarrow$ у $= 10^x$ функциясынын негизи болгон 10 саны 1 ден чоң болгондуктан, монотондуу өсүүчү болуп x тин чоң маанисине, у тин да чоң мааниси туура келет, б.а. $10^0 < 10^x \leq 10^6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x \leq 6$. Анда берилген барабарсыздыктын туура чыгарылыш көптүгү д) $(0,\ 6]$ аралыгы болот.◄

14 – МИСАЛ : $2\lg 0{,}5+\lg x>\lg 5$ барабарсыздыгын.

Жооптор а) $(5{,}25\ ,\ +\infty)$; б) $(4{,}75,\ +\infty)$; в) $(0,+\infty)$;

г) $(0,\ 20)$; д) $(20,+\infty)$.

►ЧЫГАРУУ . Логарифмдин алдында турган туюнтма нөлдөн чоң болушу керек болгондуктан, $x>0$ же $(0,+\infty)$ аралыгы барбарсыздыктын чыгарылыштарынын жашоо аймагы (ЧЖА) болот.

$$2\lg 0{,}5+\lg x>\lg 5 \quad\Leftrightarrow\quad \lg 0{,}5^2+\lg x>\lg 5 \quad\Leftrightarrow\quad \lg(x\cdot\ 0{,}5^2)>\lg 5$$

$y=\lg x$ функциясынын негизи 10 саны бирден чоң болуп, логарифмдик функция монотондуу өсүүчү болуп, аргументтин чоң маанисине функциянын да чоң мааниси туура келет. Анда

$x\cdot 0{,}25>5\ \ \Rightarrow\ \ x>\frac{5}{0{,}25}=\frac{500}{25}=20$ же д) $(20,+\infty)$ аралыгы ЧЖА га кирип, барабарсыздыктын чыгарылышы болот деп жооп беребиз. ◄

15 – МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+8)\geq -1$ барабарсыздыгын.

Жооптор а) $[1,\ 5]$; б) $[1,\ 2)\cup(4,\ 5]$; в) $[1,\ 2]\cup[4,\ 5]$;

г) $(-\infty,\ \ 1]\cup[5,+\infty)$; д) $(2,\ \ 4)$.

►ЧЫГАРУУ . Берилген барбарсыздыктын ЧЖА сы $x^2-6x+8>0$ шартын канааттандырган x чекиттеринин көптүгү болот. Ободу квадраттык үч мүчөнүн нөлдөрүн табалы

$$x^2-6x+8\ =0\ \ \Rightarrow\ \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{6^2-\ 4\cdot 8\cdot 1}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=$$

$$=\frac{6\ \pm\ 2}{2},\ \ x_1\ =\frac{6+2}{2}=4,\ \ x_2=\frac{6-2}{2}=2\ .$$

$y=x^2-6x+8$ функциясынын графиги бутактары жогору караган парабола болуп, нөлдөрүнүн арасында нөлдөн кичине, алардын сыртында нөлдөн чоң маанилерди кабыл алат

$-\infty\ \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_1\_\_\_}^{x^2-6x+8>0}2\underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_}_{x^2-6x+8<0}4\overbrace{\_\_\_5\_\_\_\_\_\_\_\_}^{x^2-6x+8>0}+\infty$. Анда

$(-\infty,\ 2)\cup(4,+\infty)$ аралыктары теңдемеге ЧЖА болот.

Логарифмдин негизи болгон $\frac{1}{3}$ саны бирден кичине болгондуктан, логарифмдик функция кемүүчү болуп, аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси туура келет. Анда берилген барабарсыздыкты

$\mathrm{Log}_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 8) \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 8 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ көрүнүшүндө потенцирлөөгө (логарифмден куткарууга) болот.

Мындан $x^2 - 6x + 8 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 \leq 3 \Rightarrow$

$x^2 - 6x + 5 \leq 0$ барабарсыздыгы келип чыгып, квадраттык үч мүчөнүн нөлдөрүн

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} =$$

$= \frac{6 \pm 4}{2}$, $x_1 = \frac{6+4}{2} = 5$, $x_2 = \frac{6-4}{2} = 1$ таап, алардын арасында нөлдөн кичине же барабар , ал эми сыртында нөлдөн чоң

$$-\infty \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 0 \_\_\_\_}^{x^2-6x+5>0} \underbrace{1 \_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_\_\_ 4 \_\_\_ 5}_{x^2-6x+5\leq 0} \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{x^2-6x+5>0} +\infty$$ болорун

көрөбүз.

Демек, барабарсыздыктын чыгарылыш көптүгү $[1,\ 5]$ аралыгы болот. Табылган чыгарылыш аралыгы менен ЧЖА нын кесилиши болгон

$\{(-\infty,\ 2) \cup (4, +\infty)\} \cap [1,\ 5] = [1,\ 2) \cup (4,\ 5]$ аралыгын туура чечим катарында кабыл алабыз.

Туура жооп б) $[1,\ 2) \cup (4,\ 5]$.◀

16 – МИСАЛ : $\frac{4^x - 2}{1 - 3x} > 0$ барабарсыздыгын.

Жооптор а) $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$; б) $(-\infty,\ 2)$; в) $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$; г) $\left(-\infty,\ \frac{1}{3}\right)$;

д) $(2, +\infty)$.

►ЧЫГАРУУ . Бөлчөк эки учурда нөлдөн чоң болушу мүмкүн:

1) Алымы менен бөлүмү нөлдөн чоң $\begin{cases} 4^x - 2 > 0, \\ 1 - 3x > 0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 4^x > 2, \\ 3x < 1 \end{cases}$ ⇨

$\begin{cases} 2^{2x} > 2^1 (\text{негизи } > 1), \\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 2x > 1, \\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$ ⇨ $x \in \{\emptyset\}$, анткени x бир учурда $\frac{1}{2}$ ден чоң, ал эми $\frac{1}{3}$ ден кичине боло албайт.

2) Алымы менен бөлүмү нөлдөн кичине учур$\begin{cases} 4^x - 2 < 0, \\ 1 - 3x < 0 \end{cases}$ ⇨

$$\begin{cases} 4^x < 2, \\ 3x > 1 \end{cases} ⇨ \begin{cases} 2^{2x} < 2^1 (\text{негизи } > 1), \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases} ⇨$$

$\begin{cases} 2x < 1, \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$ ⇨ $x \in \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$интервалында аткарылат.

Туура жообу в) $x \in \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$. ◄

17 – МИСАЛ : $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$ барабрсыздыгын.

Жооптор а) $(-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5\,,\ 1)$; б) $(0,\ \log_6 2] \cup [\log_6 5\,,\ 1]$;

в) $[\log_6 2\,,\quad \log_6 5]$; г) $(0,\ 1)$; д) $(0,\quad 2] \cup [5,\quad 6)$.

►ЧЫГАРУУ .Барабарсыздыктын жашашы үчүн

$6^{x+1} - 36^x > 0 \quad \Leftrightarrow 6^x \cdot (6 - 6^x) > 0$ болушу керек.

$\forall\, x$: $6^x > 0$ болгондуктан, $6 - 6^x > 0$ болсо гана логарифмдин алдындагы туюнтма нөлдөн чоң болот. Мындан $6^x < 6^1$ ⇨ $x < 1$ же $x \in (-\infty,\ 1)$ аралыгы барабарсыздыкка ЧЖА болору келип чыгат.

Логарифмдин негизи болгон $\frac{1}{\sqrt{5}}$ саны 1 ден кичине болгондуктан, логарифмалык функция монотондуу кемүүчү болуп, аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси туура келет. Ошондуктан логарифмалык барабарсыздыкты потенцирлегенде

$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2 \Leftrightarrow \quad 6^{x+1} - 36^x \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2} \quad \Leftrightarrow$

$6^{x+1} - 36^x \leq 5 \Leftrightarrow -6^{2x} + 6 \cdot 6^x - 5 \leq 0$ барабарсыздыгына теңдеш өзгөртүп түзө алабыз.

Мындан $y > 0$ шарты менен $y = 6^x$ белгилөөсүн киргизип,

$-y^2 + 6y - 5 \leq 0$ квадраттык барабарсыздыгын алабыз.

Анын нөлдөрүн

$$-y^2 + 6y - 5 = 0 \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{-2} =$$

$= \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-6 \pm 4}{-2}$, $y_1 = \frac{-6+4}{-2} = 1$, $y_2 = \frac{-6-4}{-2} = 5$ таап, квадраттык үч мүчөдө $a = -1 < 0$ болгондуктан бутактары төмөн караган парабола болуп, нөлдөрүнүн арасында нөлдөн чоң, ал эми сыртында нөлдөн кичине болот

$-\infty \overbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_0\_\_\_1}^{-y^2+6y-5\leq 0} \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}_{-y^2+6y-5>0} \overbrace{5\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}^{-y^2+6y-5\leq 0} + \infty$ же

$y \in (0,\ 1] \cup [5, +\infty)$.Анда белгилөөгө кайрылып, $y = a^x$ функциясынын негизи $a = 6 > 1$ болгондуктан монотондуу өсүүчү көрсөткүчтүү жана логарифмдик функциялар катарында аргументтердин чоң маанисине функциялардын да чоң маанилери тиешелеш коюлуп,

1) $y = 6^x \quad \Rightarrow \quad 0 < 6^x \leq 1 \Rightarrow 6^x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 6^x \leq 6^0 \quad \Rightarrow$

$x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty,\ 0]$;

2)$6^x \geq 5 \quad \Rightarrow \quad x \geq \log_6 5 \Rightarrow x \in [\log_6 5, +\infty)$

$(-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5, +\infty)$ чыгарылыш аралыктары табылат.

Табылган чыгарылыш аралыктарынын ЧЖА менен кесилиши болгон

$\{(-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5\,, +\infty)\} \cap (-\infty,\ 1) = (-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5\,,\ 1)$ аралыгы, барбарсыздыктын чыгарылышы болот.

Туура жообу а) $(-\infty,\ 0] \cup [\log_6 5\,,\ 1)$. ◄

5.Теңдемелер системасын чыгаргыла.

18 – МИСАЛ : $\begin{cases} \frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1, \\ 2^{x-2} \cdot 2^{y} = 8 \end{cases}$ системасын.

Жооптор .
а) $(0{,}8;\ \ 4{,}2)$; б) $(4{,}2;\ \ 0{,}8)$; в) $(1;\ \ 4)$; г) $(4;\ \ 1)$; д) $(-1;\ \ 6)$ түгөй сандары.

► ЧЫГАРУУ. Теңдемелер системасын

$$\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{2} = 1 \text{ (6 га көбөйтүп)}, \\ 2^{x-2} \cdot 2^{y} = 8 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ 2^{x-2+y} = 2^{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ x - 2 + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 6, \\ x + y = 5 \end{cases}$ көрүнүшүнө теңдеш өзгөртүп түзөбүз.

Системанын экинчи жолчосун 3 кө көбөйтүп биринчисине кошсок, анда $5y = 21$ болуп, түгөй чечимдердин экинчиси $y = \frac{21}{5} = 4{,}2$ табылат. Табылган маанини экинчи жолчого коюп, чечим болгон чекиттин абсциссасын же биринчи түгөйүн табабыз

$x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - 4{,}2 = 0{,}8$. Демек,$\frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 1$ түзү менен, $2^{x-2} \cdot 2^{y} = 8$ ийриси $(0{,}8;\ \ 4{,}2)$ чекитинде кесилишет.

Текшерүү:$(x;\ \ y) = (0{,}8;\ \ 4{,}2) \Rightarrow 2^{0{,}8-2} \cdot 2^{4{,}2} = 2^{0{,}8-2+4{,}2} =$

$= 2^{3} = 8$ (туура).

Анда туура жообу а) $(0{,}8;\ \ 4{,}2)$.◄

19 – МИСАЛ : $\begin{cases} x + 4y = 16, \\ \log_7 y - \log_7 4 = \log_7(x+1) \end{cases}$ системасын.

Жооптор .

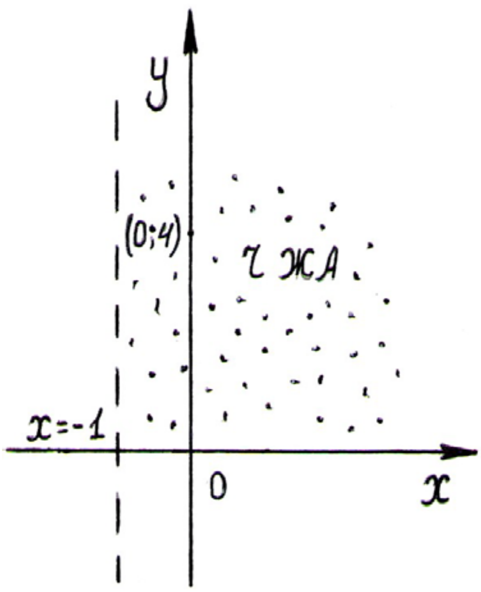
а) $(0;\ \ 4)$; б) $(4;\ \ 3)$; в) $(0;\ -4)$; г) $(-4;\ -3)$; д) $(-4;\ \ 5)$ түгөй сандары.

► ЧЫГАРУУ. Теңдемелер системасында логарифмдер катышкандыктан, алардын жашашы үчүн, алардын алдында турган туюнтмалар $\begin{cases} y > 0, \\ x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0, \\ x > -1 \end{cases}$ шарттарын канааттандырышы керек. Анда системанын ЧЖА сы координаттык тегиздиктин ЧЖА $= \{(x;\ \ y) | x > -1,\ y > 0\}$ чекиттери болушат (1.42 – чийме).

Логарифмдин касиеттерин пайдаланып, экинчи жолчону

$$\log_7 y - \log_7 4 = \log_7(x+1) \ \ \Leftrightarrow$$

$\log_7 \frac{y}{4} = \log_7(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{4} = x + 1$ же $y = 4x + 4$ көрүнүшүндө потенцирлейбиз. Анда берилген теңдемелер системасы $\begin{cases} x + 4y = 16, \\ y = 4x + 4 \end{cases}$ абалына келет. Экинчи жолчодон табылган y тин маанисин биринчи жолчого коюп,



1.42-чийме

$x + 4y = 16 \quad \Rightarrow \quad x + 4 \cdot (4x + 4) = 16 \quad \Rightarrow \quad 17x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ болорун көрөбүз. Ал эми $y = 4x + 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \cdot 0 + 4 = 4$ саны болот. Табылган $(x;\ \ y) = (0;\ \ 4)$ чекити системанын ЧЖА сына киргендиктен, туура жообу а) $(0;\ \ 4)$.◄ (текшерип көр)

20 – МИСАЛ : $\begin{cases} \frac{1}{x} + y = \frac{3}{2}\ , \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = \frac{5}{4} \end{cases}$ системасын.

Жооптор . а) $(1;\ \ 2)$; б) $\left(\frac{1}{2};\ \ 1\right)$; в) $(2;\ 1), \left(1;\ \frac{1}{2}\right)$; г) $(1;\ 2)$, $\left(\frac{1}{2};\ \ 1\right)$; д) $(-2;\ \ 2), \left(-1;\ \frac{1}{2}\right)$ түгөй сандары.

► ЧЫГАРУУ. Теңдемелер системасында катышкан бөлчөктөрдүн бөлүмдөрү катарында

$x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0$ шартына баш ийген чекиттердин көптүгү, же координаттык тегиздиктин $0x$ огунан башка бардык чекиттери системага ЧЖА болот.

Экинчи жолчонун сол жагына $2\frac{y}{x}$ туюнтмасын кошуп кемитип, сумманын квадратынын формуласы боюнча

$\frac{1}{x^2} + y^2 = \frac{1}{x^2} + 2\frac{y}{x} + y^2 - 2\frac{y}{x} = \left(\frac{1}{x} + y\right)^2 - 2\frac{y}{x}$ ээ болобуз. Бул теңдештикти пайдаланып, системаны

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + y = \frac{3}{2}, \\ \left(\frac{1}{x} + y\right)^2 - 2\frac{y}{x} = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + y = \frac{3}{2}, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\frac{y}{x} = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + y = \frac{3}{2}, \\ \frac{9}{4} - 2\frac{y}{x} = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + y = \frac{3}{2}, \\ -2\frac{y}{x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + y = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

көрүнүшүнө өзгөртүп жазабыз.

Экинчи жолчодо табылган y тин маанисин биринчи жолчого коюп, $2x$ ке $(2x \neq 0)$ көбөйтүп,

$\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; 2 + x^2 = 3x \;\Rightarrow\; x^2 - 3x + 2 = 0$ квадраттык теңдемесин алабыз.

Анын $x^2 - 3x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ чечимдери $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$, $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$ сандары болушат.

Мындан $y = \frac{1}{2}x$ байланышын пайдаланып $y_1 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$,

$y_2 = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$болорун аныктайбыз.

Ошентип системанын чечимдери $(x_1;\ y_1) = (2;\ 1)$, $(x_2; y_2) = \left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ координаталуу чекиттер болушат.

Туура жообу в) $(2;\ 1), \left(1;\ \frac{1}{2}\right)$. ◄ (текшерип көр)

6. Функциянын графигине берилген түзгө параллель боло тургандай жаныма жүргүзүүгө мүмкүн болгон чекитти тапкыла .

21 – МИСАЛ : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ функциясынын графигине абсцисса огуна параллель жаныма жүргүзүүгө мүмкүн болгон чекитти тапкыла.

Жооптор . а) $(0;\ \ 2)$; б) $(-2;\ \ 2)$; в) $(2;\ -2)$; г) $\left(2;\ -3\frac{1}{3}\right)$, $\left(-2;\ \ 7\frac{1}{3}\right)$; д) $\left(2;\ -4\frac{2}{3}\right), \left(-2;\ \ 7\frac{2}{3}\right)$ чекиттеринде.

► ТАБУУ. $y = f(x)$ функциясынын графигине $(x_0;\ y_0)$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

$y - y_0 = k(x - x_0) \ \Leftrightarrow\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ көрүнүшүндө жазыларын билебиз. Анткени функциянын x_0 чекитиндеги туундусу, геометриялык жактан функциянын графигине $(x_0;\ y_0)$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныма түздүн бурчтук $k = f'(x_0)$ коэффициенти болот. Эки түз бурчтук коэффициенттери барабар болгондо гана параллель болушат.

$0x$ абсцисса огунун бурчтук коэффициенти $k = 0$, ошондуктан ага параллель болгон изделүүчү жаныма түздүн бурчтук коэффициенти да $k = f'(x_0) \equiv 0$нөлгө тең болушу керек

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 4 + 0 = x^2 - 4 \equiv 0\ .$$

Анда $x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ же $x_1 = 2,\ x_2 = -2$ чекиттеринде $k = f'(x) \equiv 0$ болору келип чыгат. Табылган чекиттерге туура келген функциянын маанилерин эсептейли:

$$y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 4\cdot 2 + 2 = \frac{8}{3} - 8 + 2 = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}\,;$$

$$y_2 = f(x_2) = \frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2) + 2 = -\frac{8}{3} + 8 + 2 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}\,.$$

Демек, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$ функциясынын графигине

$(x_1;\ y_1) = \left(2;\ -3\frac{1}{3}\right)$ жана $(x_2;\ y_2) = \left(-2;\ 7\frac{1}{3}\right)$ чекиттеринен жүргүзүлгөн эки башка жаныма түздөр $0x$ абсцисса огуна параллель болушат. Туура жообу г) $\left(2;\ -3\frac{1}{3}\right)$, $\left(-2;\ 7\frac{1}{3}\right)$.◄

22 – МИСАЛ : $f(x) = x^2 - 5x$ функциясынын графигине $y = -x$ түзүнө параллель жаныма жүргүзүүгө мүмкүн болгон чекитти тапкыла.

Жооптор . а) $(1;\ -4)$; б) $(0;\ 0)$,
$(1;\ -4)$; в) $(2;\ -6)$; г) $(-1;\ 6)$;

д) $(3;\ -6)$ чекиттеринде.

► ТАБУУ. $y = -x$ түзүнүн бурчтук коэффициенти $k = -1$ болгондуктан, $k = f'(x) = -1$ шартына баш ийген x ти

$$f'(x) = (x^2 - 5x)' = 2x - 5 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5 = -1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 6 \quad \Rightarrow$$

$x = 3$ табабыз. Анда $x_0 = 3$ деп, берилген $f(x) = x^2 - 5x$ функциясынын x_0 чекитиндеги маанисин

$y_0 = f(x_0) = 3^2 - 5 \cdot 3 = 9 - 15 = -6$ эсептейбиз. Мындан берилген функциянын графигине $(x_0;\ y_0) = (3;\ -6)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түзү, $y = -x$ түзүнө параллель болот деген жоопко келебиз. Туура жообу д) $(3;\ -6)$. ◄

7. Функциялардын экстремумдарын тапкыла.

23 – МИСАЛ : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$ функциясынын.

Жооптор . а) $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$, $x_{max} = 0$; б) $x_{max} = -1$,

$x_{max} = 1$, $x_{min} = 0$; в) $y_{min} = 1$; г) $y_{max} = 9$, $y_{max} = 1$,

$y_{min} = 2$; д) $x_{max} = 1$, $x_{min} = 2$.

► ТАБУУ. Берилген функциянын экстремумга шектелген чекиттери, анын туундусу нөлгө тең (зарыл шарт) болгон чекиттердин арасынан изделет.

$f'(x) = (3x^4 - 4x^3 + 2)' = 12x^3 - 12x^2 = 12\,x^2 \cdot (x-1) \Rightarrow$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \; 12\,x^2 \cdot (x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\; x_2 = 1$ экстремумга шектүү чекиттер болушат. Шектүү чекиттер аркылуу өткөндө $f'(x)$ туундусунун белгисин өзгөрүшүн (жетиштүү шарт) изилдейбиз:

1. а) $x < x_1 = 0 \Rightarrow x^2 > 0,\; x - 1 < 0 \;\Rightarrow$ экөөсүнүн көбөйтүндүсү катарында $f'(x) < 0$ $(-)$ белгиде ;

б) $x_1 = 0 < x < 1$ болгондо деле $x^2 > 0,\; x - 1 < 0 \;\Rightarrow$ экөөсүнүн көбөйтүндүсү катарында $f'(x) < 0$ $(-)$ белгиде.

Ошентип $x_1 = 0$ чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$ тин белгиси өзгөрбөй $(-)$ белгисин сактап калат, анда бул чекит экстремум чекити боло албайт.

2. а) $0 < x < x_2 = 1 \Rightarrow x^2 > 0,\; x - 1 < 0 \;\Rightarrow\; f'(x) < 0$ $(-)$ белгиде.

б) $x_2 = 1 < x$ болгондо $x^2 > 0,\; x - 1 > 0 \;\Rightarrow$ экөөсүнүн көбөйтүндүсү катарында $f'(x) > 0$ $(+)$ белгиде болот.

Демек, $x_2 = 1$ чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$ тин белгиси $(-)$ тан, $(+)$ ка өзгөрүп, $x_2 = 1$ минимум чекити болот. Функциянын башка экстремум чекиттери жашабайт.

Туура жообу в) $y_{min} = f(x_2) = 3 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 2 = 3 - 4 + 2 = 1$ болот . ◄

24 – МИСАЛ : $f(x) = 2x\,e^x$ функциясынын.

Жооптор . а) $x_{max} = -1$; б) $y_{max} = -\frac{2}{e}$; в) $x_{min} = -1$; г) $y_{min} = -\frac{2}{e}$;

д) $y_{min} = 0$.

► ТАБУУ. $f'(x) = (2x\,e^x)' = (2x\,)' \cdot e^x + 2x \cdot (e^x)' =$

$= 2e^x + 2x\,e^x = 2e^x \cdot (1 + x) \Rightarrow$ зарыл шарт боюнча

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2e^x \cdot (1 + x) = 0 \;\Rightarrow\; 2e^x > 0 \;\Rightarrow\; 1 + x = 0 \;\Rightarrow$

$x = -1$ экстремумга шектүү чекит болот. Шектүү чекит аркылуу өткөндө $f'(x)$ туундусунун белгисин өзгөрүшүн (жетиштүү шарт) изилдейбиз:

а) $x < -1$ болгондо $1 + x < 0$ $(-)$ болуп, $f'(x)$ туундусу $(-)$ белгисине ээ.

б) $x > -1$ болгондо $1 + x > 0$ $(+)$ болуп, $f'(x)$ туундусу $(+)$ белгисине ээ.

Ошентип $x = -1$ чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$тин белгиси $(-)$ тан, $(+)$ ка өзгөргөндүктөн, ал минимум чекити болот.

Туура жообу в) $x_{min} = -1$. ◄

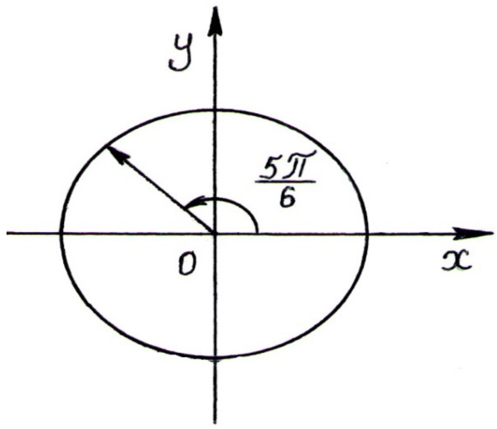
25 – МИСАЛ : $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ функциясынын $[0,\ \pi]$ аралыгындагы.

Жооптор . а) $x_{max} = \frac{\pi}{6}$; б) $y_{max} = -1$; в) $x_{min} = \frac{5\pi}{6}$;

г) $y_{min} = 1$; д) $y_{max} = 2$.

► ТАБУУ. Экстремумга шектелген чекиттерди табуу үчүн функциянын туундусун

$f'(x) = \left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)' = \cos x - \sqrt{3}(-\sin x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$ эсептеп, зарыл шарт боюнча туунду нөлгө барабар болгон чекиттерди же$f'(x) = 0$ ⇨ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$ теңдемесинин чечимдерин табабыз.



1.43-чийме

Оболу туундунун эки жагын тең нөлдөн айырмалуу болгон $\frac{1}{2}$ санына көбөйтүп$\frac{1}{2}f'(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$, анын оң жагын

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x =$$

$= \sin\frac{\pi}{6}\cdot\ \cos x + \cos\frac{\pi}{6}\ \cdot \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ көрүнүшүнө келтирсек, туунду $f'(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ көрүнүшүндө жазылып,

$f'(x) = 0$ теңдемеси $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ абалына келет. Анын чечими же экстремумга шектелген чекит бирдик айланадагы ординатасы 0 санына барабар болгон чекитке туура келген борбордук $\frac{\pi}{6} + x$ бурчунун сандык мааниси болот. Алгачкы $(k = 0)$ айлампада $0x$ огунда ординатасы 0 болгон эки чекит бар, аларга $\frac{\pi}{6} + x = 0$ жана

$\frac{\pi}{6} + x = \pi$ борбордук бурчтары туура келет. Айлануулардын санын эске алып, аларды $\frac{\pi}{6} + x = k\pi,\ k \in Z$ же $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$ көрүнүшүндө жаза алабыз.

Берилген $[0,\ \pi]$ аралыгына $k = 1$ болгон учурдагы

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$ бурчу гана таандык болот. Ошондуктан $x = \frac{5\pi}{6}$ аркылуу өткөндө $f'(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ туундусунун белгилеринин өзгөрүшүн изилдейбиз (1.43 – чийме).

а) $x < \frac{5\pi}{6}$ болсо, анда $\frac{\pi}{6} + x$ бурчу 2 – чейректен чыкпай, бирдик айланадагы ординатасы оң чекиттерге туура келет же

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > 0 \ \Leftrightarrow\ f'(x) > 0\ (+)$ белгиге ээ.

б) $x > \frac{5\pi}{6}$ болсо, анда $\frac{\pi}{6} + x$ бурчу 3 – чейрекке өтүп, бирдик айланадагы ординатасы терс чекиттерге туура келет же

$\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) < 0 \ \Leftrightarrow\ f'(x) < 0\ (-)$ белгиге ээ.

Андай болсо,$x = \frac{5\pi}{6}$ чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$ туундусу белгисин $(+)$ тан, $(-)$ ка өзгөртүп максимум чекити болот. Бул чекиттеги функциянын максималдык мааниси

$y_{max} = \sin\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ саны болот.

Туура жообу д) $y_{max} = 2$.◄

8.Берилген кесиндилерде функциялардын эң чоң жана кичине маанилерин тапкыла.

26 – МИСАЛ : $[1,\ 4]$ кесиндисинде $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ функциясынын.

Жооптор . а) $1,\ -11$; б) $1, -8$; в) $8, -1$; г) $8, -11$; д) $3, -9$.

► ТАБУУ. 1) Берилген аралыктагы функциянын экстремумдарын аныктайлы.

$f'(x) = (3x^2 - 12x + 1)' = 6x - 12$ туундусун эсептеп, экстремумга ээ болуучулуктун зарыл шарты боюнча экстремумга шектелген

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$ чекитин табабыз. Табылган чекит көрсөтүлгөн аралыкка таандык жана функциянын бул чекиттеги мааниси

$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 1 = 12 - 24 + 1 = -11$ санына барабар.

2) Функциянын аралыктын учтарындагы маанилерин эсептейбиз

$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 1 = 3 - 12 + 1 = -8$;

$f(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 1 = 48 - 48 + 1 = 1$.

Функциянын $\{f(1),\ f(2),\ f(4)\} = \{-8, -11,\ 1\}$ маанилеринин эң чоңу 1, ал эми эң кичинеси “-11” болорун көрөбүз. Туура жообу а) 1, -11 . ◄

27 – МИСАЛ : $[0,\ \pi]$ кесиндисинде $f(x) = 1 + 4\sin x - 2x$ функциясынын.

Жооптор . а) $1,\ 1 - 2\pi$; б) $3,\ 1 - 2\pi$; в) $1 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$, $1 - 2\pi$;

г) $1 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$, 1; д) $1 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$, 3.

► ТАБУУ.

1) $f'(x) = (1 + 4\sin x - 2x)' = 0 + 4\cos x - 2 = 4\cos x - 2$ туундусун эсептеп, экстремумга ээ болуучулуктун зарыл шарты боюнча туундусу нөлгө тең болгон же экстремумга шектелген

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\cos x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ бирдик айланада абсциссасы $\frac{1}{2}$ болгон чекитке туура келген $x = \pm\frac{\pi}{3}$ бурчтарын табабыз. Айлануулардын санын эске алып, жалпы учурда аны $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$ көрүнүшүндө жазууга болот. Көрсөтүлгөн $[0,\ \pi]$ аралыгында алгачкы айлампадагы $\frac{\pi}{3}$ бурчу гана $(k = 0)$жайгашкан. Функциянын бул чекиттеги мааниси

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 4\sin\frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{\pi}{3} = 1 + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} = 1 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ саны болот.

2) Аралыктын учтарындагы маанилерин

$$f(0) = 1 + 4\sin 0 - 2\cdot 0 = 1 + 4\cdot 0 - 0 = 1;$$

$f(\pi) = 1 + 4\sin\pi - 2\cdot\pi = 1 + 4\cdot 0 - 2\pi = 1 - 2\pi$ табабыз.

Функциянын берилген кесиндидеги

$\left\{f\left(\frac{\pi}{3}\right),\ f(0),\ f(\pi)\right\} = \left\{1 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3},\ 1,\quad 1 - 2\pi\right\}$ маанилеринин эң чоңу $1 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$, ал эми эң кичинеси $1 - 2\pi$ экендигин көрөбүз.

Туура жообу в) $1 + 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$, $1 - 2\pi$. ◄

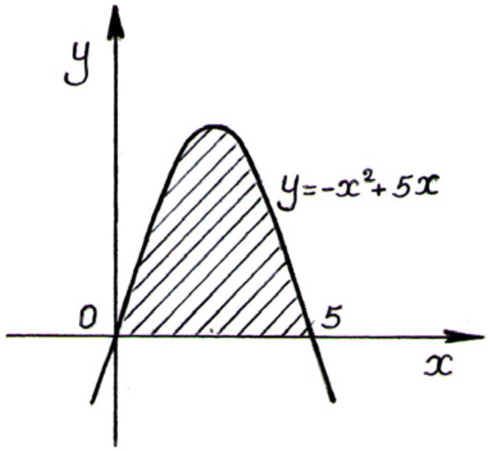
9. Берилген ийрилер жана түздөр менен чектелген фигуралардын аянттарын тапкыла.

28 – МИСАЛ : $f(x) = -x^2 + 5x$ функциясы менен $0x$ абциссасынын арасында чектелген фигуранын.

Жооптор . а) $19\frac{5}{6}$; б) $19\frac{1}{6}$; в) $20\frac{1}{6}$; г) $20\frac{5}{6}$; д) 20.

► ТАБУУ. Берилген $f(x) = -x^2 + 5x$ функциясынын $0x$ абциссасы менен кесилиш чекиттери ординатасы $f(x) = 0$ болгон чекиттер болгондуктан,

$-x^2 + 5x = 0 \quad \Rightarrow \ -x \cdot (x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \ \ x_2 = 5$ чекиттери болушат (1.44 – чийме) . Анда изделүүчү аянт



1.44-чийме

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x\,)\,dx =$$

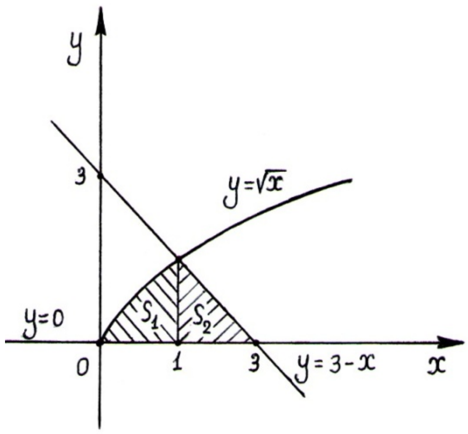
$$= -\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^5 =$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + 5 \cdot \frac{5^2}{2}\right) - \frac{0^3}{3} + 5\,\frac{0^2}{2} =$$

$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6} = 20\,\frac{5}{6}$ аянт бирд. барабар болот.

Туура жообу $20\,\frac{5}{6}$.◄

29 – МИСАЛ : $f(x) = 2\sqrt{x}$, $y = 3 - x$, $y = 0$ функциялары менен чектелген фигуранын (1.45 – чийме).



1.45-чийме

Жооптор .

а) 3; б) $3\frac{1}{3}$; в) $2\frac{2}{3}$; г) $1\frac{2}{3}$; д) 2.

► ТАБУУ. Фигуранын чек араларын аныктоо үчүн, функциялардын кесилишүү чекиттерин аныктайбыз.

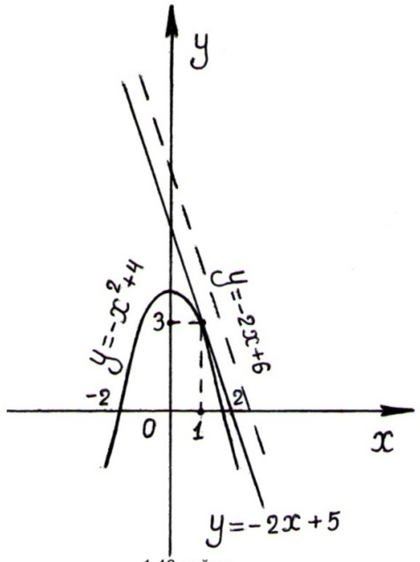
1) $f(x) = 2\sqrt{x}$ менен $y = 3 - x$ түзүнүн: Аларды теңдештирип,

$2\sqrt{x} = 3 - x$ теңдемесине ээ болобуз. Эки жагын тең квадратка көтөрүп $\left(2\sqrt{x}\right)^2 = (3-x)^2 \quad \Rightarrow \quad 4x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow$

$x^2 - 10x + 9 = 0$ квадраттык теңдемеге ээ болуп, анын

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 1 \cdot 9} = 5 \pm \sqrt{16} = 5 \pm 4,$$

$x_1 = 5 + 4 = 9$, $x_2 = 5 - 4 = 1$ чечимдерин табабыз. Бул чечимдер эки функциянын кесилишүү чекиттеринин абсциссалары болушат.



1.46-чийме

Биздин учурда $x_1 = 9$ чекити каралбайт, анткени ал $f(x) = 2\sqrt{x}$ тин графигинин $0x$ огунун төмөн жагында улантылуучу жалган бутагы менен у $= 3 - x$түзүнүн кесилишүү чекитинин абсциссасы болот. Ошондуктан $x_2 = 1 \Rightarrow$ $y_2 = f(x_2) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow (1;\ 2)$чекитинде кесилишет;

2) $f(x) = 2\sqrt{x}$ менен у $= 0$ түзү: Теңдештирсек $2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ чекитинде кесилишет;

3) $y = 3 - x$ менен $y = 0$ түзү: Теңдештирип,

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ чекитинде кесилишерин көрөбүз.

Аянты изделип жаткан фигураны эки S_1, S_2 бөлүктөргө бөлүп карайлы.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 2\sqrt{x}\, dx + \int_1^3 (3 - x)dx = 2\left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^1 +$$

$$+\left.\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^3 = \frac{4}{3}\left.x^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 + \left[\left(3\cdot 3 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(3\cdot 1 - \frac{1^2}{2}\right)\right] =$$

$= \frac{4}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\cdot 0^{\frac{3}{2}} + 9 - \frac{9}{2} - 3 + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} + 9 - 4 - 3 = 3\frac{1}{3}$аянт бирд.

Туура жообу б) $3\frac{1}{3}$.◄

30 – МИСАЛ : $f(x) = -x^2 + 4$ функциясынын графигине

у $= -2x + 6$ түзүнө параллель болгон жаныма түздүн теңдемесин тапкыла (1.46 – чийме).

Жооптор . а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $1\frac{1}{3}$; д) $1\frac{2}{3}$.

► ТАБУУ. а) $y = f(x)$ функциясынын графигине $(x_0;\ y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ көрүнүшүндө жазылары белгилүү. Мында $k = f'(x_0) -$ түздүн бурчтук коэффициенти. Параллель түздөрдүн бурчтук коэффициенттери барабар болушкандыктан,

$k \equiv f'(x_0) = -2$ болгондо $(x_0;\ y_0)$ чекити аркылуу жүргүзүлгөн жаныма түз,$y = -2x + 6$ түзүнө параллель болот.

Берилген функциянын туундусун $f'(x) = (-x^2 + 4)' = -2x$эсептеп, аны "$-2$" ге теңдеп

$f'(x) = -2 \Rightarrow\ -2x = -2\quad \Rightarrow\quad x = 1$ же $x_0 = 1$ табабыз. Мындан

$y_0 = f(x_0) = -1^2 + 4 = -1 + 4 = 3$ болору келип чыгат.

Демек, $(x_0;\ y_0) = (1;\ 3)$ чекити аркылуу жүргүзүлгөн жаныма түз

$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow\ y - 3 = -2 \cdot (x - 1)\quad \Rightarrow\quad y = -2x + 5$ теңдемеси менен берилет. Туура жообуу $= -2x + 5$.◄

Мамаюсупов Маккамбай Шеранович

Аттокурова Анаркан Джалиловна

Садыков Замир Маматхалилович

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ боюнча

тесттерди чыгаруу

Компьютерде терген Э. Авазова.

Чиймелерин сызган Абдиваитов К.Х.

Басууга 2.02.13 – кол коюлуп, ОшМУ да көбөйтүлгөн.

Көлөмү\ 282 бет. Саны: 100 даана.